一、(15 分)计算下列各题:

1、(5 分)已知 4 阶行列式 D 的第 3 行元素分别为 $-1,0,2,4$,第 4 行元素对应的余子式依次是 $5,10,a,4$,求 a 的值.

2、(5 分)已知矩阵 A,B 满足关系 $AB-B=A$,其中 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,求矩阵 A.

3、(5 分)设 A^* 为 3 阶方阵 A 的伴随矩阵,$|A|=2$,计算行列式 $|(3A)^{-1}-\frac{1}{2}A^*|$ 的值.

二、(15 分)计算 $n\ (n\geq 3)$ 阶行列式:$D_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & x & \cdots & x\\ 1 & x & 0 & \cdots & x\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x & x & \cdots & 0\end{vmatrix}$。(注释:该行列式主对角线上元素都是 0,第一行和第一列除去第一个位置的元素是 0 外,其余的都是 1,行列式中其余的元素都是 x。要求写出解题步骤,也可以用语言叙述).

三、(30 分)证明下列各题

1、(10 分)如果 $(f(x),g(x))=1$,那么 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

2、(10 分)A 为 n 阶方阵,如果 $A^2=A$,则:秩 $(A-E)+$ 秩 $(A)=n$,其中 E 是 n 阶单位矩阵.

3、(10 分) σ 是线性空间 V 上的可逆线性变换,则 σ 的特征值一定不为 0.

四、(15 分) 设 4 元齐次线性方程组 (i) 为 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_2-x_4=0\end{cases}$,又已知某 4 元齐次线性方程组 (ii) 的通解为:$k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$,$(k_1,k_2$为任意常数$)$.

(1)(5 分)求方程组 (i) 的基础解系;

(2)(10 分)问方程组 (i) 与 (ii) 是否有非零公共解?若有,则求出所有的非零公共解.若没

有，则说明理由.

五、(20 分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2\alpha x_2x_3$ 通过正交线性变换

$X=PY$ 化成标准形 $f=2y_1^2+2y_2^2+\beta y_3^2$，求常数 α,β 的值及所用的正交线性变换矩阵 P.

六、(15 分) 符号 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 表示由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成的子空间。设有子空间

$$V_1=\left\{\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle| x_1+x_2+x_3+x_4=0\right\},\quad V_2=\left\{\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle| x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}.$$

(1) (5 分) 将 V_1 和 V_2 用符号 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 的形式表示出来；

(2) (10 分) 求子空间 V_1+V_2 和 $V_1\cap V_2$ 的维数和一组基.

七、(10 分) 列向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 R^n 空间的两组基，线性变换 σ 在 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵分别为 A 和 B，证明：A 和 B 是相似的.

八、(15 分) 如果向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，证明：表示方法是惟一的充分必要条件是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

九、(15 分) 设 A 是 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，B' 为 B 的转置矩阵，证明：$B'AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$.

河南科技大学

2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题答案及评分标准

科目代码： 856　　　　科目名称： 高等代数

一、(15 分) 计算下列各题：

1、(5 分) 已知4**阶行列式**D**的第**3**行元素分别为** $-1,0,2,4$**，第**4**行元素对应的余子式依次是**$5,10,a,4$**，求**a**的值。**

2、(5 分) 已知矩阵A,B**满足关系**$AB-B=A$**，其中**$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$**，求矩阵**$A$**。**

3、(5 分) 设A^***为**3**阶方阵**A**的伴随矩阵，**$|A|=2$**，计算行列式**$|(3A)^{-1}-\frac{1}{2}A^*|$**。**

解：1、因为 $a_{31}A_{41}+a_{32}A_{42}+a_{33}A_{43}+a_{34}A_{44}=0$，L L (3分)

这里a_{ij}**和**A_{ij}**分别是第**i**行第**j**列处的元素和该元素的代数余子式，**

所以有 $-1\times(-5)+0\times10+2\times(-a)+4\times4=0$，**可得**$a=\frac{21}{2}$。L L (5分)

2、 因为$AB-A=B$**，所以**$A(B-E)=B$**，** $A=B(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，L L (5分)

3、$|(3A)^{-1}-\frac{1}{2}A^*|=|\frac{1}{3}A^{-1}-A^{-1}|=|-\frac{2}{3}A^{-1}|=(-\frac{2}{3})^3|A^{-1}|=-\frac{4}{27}$。L L (5分)

二、(15 分)计算 $n\ (n\ge 3)$ 阶行列式：$D_n=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&x&\cdots&x\\1&x&0&\cdots&x\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&x&x&\cdots&0\end{vmatrix}$ 。(注释：该行列式主对角线上元素都是 0，第一行和第一列除去第一个位置的元素是 0 外，其余的都是 1，行列式中其余的元素都是 x 。要求写出解题步骤，也可以用语言叙述)。

解(法一)：

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&x&\cdots&x\\1&x&0&\cdots&x\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&x&x&\cdots&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\times(-x)+r_i,(i=2,3,\cdots,n)}\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&-x&0&\cdots&0\\1&0&-x&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&-x\end{vmatrix}\cdots\cdots\quad(6分)$$

当 $x\ne 0$ 时，再把第 j 列的 $\dfrac{1}{x}$ 倍加到第 1 列($j=2,3,\cdots,n$)，就把 D_n 化成了上三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\dfrac{n-1}{x}&1&1&\cdots&1\\0&-x&0&\cdots&0\\0&0&-x&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-x\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}\ ,\qquad\cdots\cdots\quad(12分)$$

当 $x=0$ 时，显然有 $D_n=0$ 。所以总有

$$D_n=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}\ 。\qquad\cdots\cdots\quad(15分)$$

(法二)：把第 2 行的(-1)倍分别加到第 $3,4,\cdots,n$ 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&x&\cdots&x&x\\0&x&-x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&x&0&\cdots&-x&0\\0&x&0&\cdots&0&-x\end{vmatrix}\quad\cdots\cdots\quad(6分)$$

再按第一列展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x&-x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\x&0&\cdots&-x&0\\x&0&\cdots&0&-x\end{vmatrix}\underline{\underline{l_i\times1+l_1,(i=2,3,\cdots,n)}}\begin{vmatrix}n-1&1&\cdots&1&1\\0&-x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-x&0\\0&0&\cdots&0&-x\end{vmatrix}$$

$=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$。 …… (15分)

三、(30 分）证明下列各题

1、(10 分）如果$(f(x),g(x))=1$，**那么**$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$。

2、(10 分）A**为**n**阶方阵，如果**$A^2=A$，**则：秩**$(A-E)+$**秩**$(A)=n$，**其中**E**是**n**阶单位矩阵。**

3、(10 分） σ**是线性空间**V**上的可逆线性变换，则**σ**的特征值一定不为**0。

解：1、令$p(x)$**是**$f(x)g(x)$**和**$f(x)+g(x)$**的任一个公因式，则**$p(x)$**整除**$f(x)$**和**$g(x)$**之一，比如说整除**$f(x)$，**那么也整除**$(f(x)+g(x))-f(x)=g(x)$，…… (4分)

这也就说明$p(x)$**是**$f(x)$**和**$g(x)$**的公因式，**…… (8分)

由$(f(x),g(x))=1$，**可知**$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$。…… (10分)

2、由于$A^2=A$，**所以**$A(A-E)=0$，**所以 秩**$(A-E)+$**秩**$(A)\le n$，…… (4分)

又因为 $A+(E-A)=E$，**所以 秩**$(E-A)+$**秩**$(A)\ge$**秩**$(E)=n$，…… (8分)

而 秩$(E-A)=$**秩**$(A-E)$，…… (9分)

所以有　秩$(A-E)+$秩$(A)=n$。L L　(10分)

3、设向量ξ是线性变换σ的关于特征值λ的特征向量，则$\sigma\xi=\lambda\xi$，L L　(3分)

用线性变换σ的逆变换σ^{-1}作用上面式子的两端，则有$\xi=\lambda(\sigma^{-1}\xi)$，L L　(6分)

由于特征向量$\xi\neq 0$，所以$\lambda\neq 0$。L L　(10分)

四、(15分)设4元齐次线性方程组(i)为$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$，又已知某4元齐次线性方程组$(ii)$的通解为：$k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix},(k_1,k_2$为任意常数$)$。

(1)(5分)求方程组(i)的基础解系；

(2)(10分)问方程组(i)与(ii)是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解。若没有，则说明理由。

解：(1)把方程组(i)的系数矩阵化成简化行阶梯形

$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$，L L　(2分)

求得线性无关的两个解向量为：$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，L L　(4分)

则 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$为方程组方程组$(i)$的基础解系。L L　(5分)

（2）（解法一）：方程组(ii)的通解 $k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_2\\k_1+2k_2\\k_1+2k_2\\k_2\end{pmatrix}$, $(k_1,k_2$为任意常数$)$

中满足方程组(i)的解既是(i)和(ii)的公共解，将(ii)的通解代入方程组(i)，得

$\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0\\ k_1+2k_2-k_2=0\end{cases}$，$\Lambda\Lambda$　(5分)

解得$k_1=-k_2$**，故当**$k_1=-k_2=-k\neq 0$**时，向量**

$k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}=-k\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $(k$为任意非零常数$)$ **满足方程组(i)，它当然也是方程组(ii)的解，故方程组(i)与(ii)有非零公共解** $k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$(k$为任意非零常数$)$。L L　(10分)

（解法二）：为确定方程组(i)与(ii)的非零公共解，也可以令(i)与(ii)的通解相等，即令：

$\lambda_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$，L L (5分)

得到齐次线性方程组： $\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\0&1&-1&-2\\1&0&-1&-2\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\Lambda\Lambda$ (7分)

解得，$\lambda_1=\lambda_2=k_2$，$k_1=-k_2$　$(k_2$为任意非零常数$)$**，由此得到方程组(i)与(ii)的非零公共解为：**

$$\lambda_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$，（k_2为任意非零常数）L L (10分)

五、(20 分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2\alpha x_2x_3$ **通过正交线性变换** $X=PY$ **化成标准形** $f=2y_1^2+2y_2^2+\beta y_3^2$**，求常数** α,β **的值及所用的正交线性变换矩阵** P**。**

解：实二次型以及标准形所对应的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-\alpha\\-1&-\alpha&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&\beta\end{pmatrix}$$，L L (3分)

由于上面两个矩阵相似，所以主对角线上的元素之和相等，得到 $\beta=-1$，L L (6分)

因为 $|A-2E|=\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-\alpha\\-1&-\alpha&-1\end{vmatrix}=0$，**所以得到** $\alpha=1$。L L (9分)

求 $\lambda_1=2$ **对应的特征向量，解方程组** $(2E-A)X=0$，

得到方程组 $(2E-A)X=0$ **的两个正交的解为** $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$，L L (13分)

单位化 $\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，L L (14分)

求 $\lambda_2=-1$ **对应的特征向量，解方程组** $(-E-A)X=0$，

得到方程组$\left(-E-A\right)X=0$**的解为** $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，L L (17分)

单位化$\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$。L L (18分)

则所用的正交变换矩阵为 $P=\left(\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$。L L (20分)

六、（15 分）符号 $L(\alpha_1,\alpha_2,\text{L} ,\alpha_m)$ **表示由向量** $\alpha_1,\alpha_2,\text{L} ,\alpha_m$ **生成的子空间。设有子空间**

$$V_1=\left\{\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \middle| \, x_1+x_2+x_3+x_4=0\right\}，V_2=\left\{\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \middle| \, x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}。$$

（1）（5 分）将V_1**和**V_2**用符号**$L(\alpha_1,\alpha_2,\text{L} ,\alpha_m)$**的形式表示出来；**

（2）（10 分）求子空间V_1+V_2**和**$V_1\cap V_2$**的维数和一组基。**

解：（1）。解线性齐次方程组$x_1+x_2+x_3+x_4=0$**得到子空间**V_1**的基础解系统：**

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$ ，L L (2分)

同样道理可以得到子空间V_2**的基础解系统：**

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$，L L (4分)

所以$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$。L L (5分)

（2）。显然可以看出，子空间V_1**和**V_2**的维数都是 3**

$V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，L L (2分)

矩阵经过行初等变换后可以得到：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$，L L (4分)

所以可以看出向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$**是**$V_1+V_2$**的一组基，从而**$V_1+V_2$**的维数是 4。**L L (6分)

由公式： 维(V_1)+**维**(V_2)=**维**$(V_1\cap V_2)$+**维**(V_1+V_2)，**可知：维**$(V_1\cap V_2)$**=2，**L L (8分)

解方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1-x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$**可以得到**$V_1\cap V_2$**的一组基：**

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \gamma_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$。L L (10分)

七、(10 分) 列向量$\xi_1,\xi_2,\text{L},\xi_n$**和**$\eta_1,\eta_2,\text{L},\eta_n$**是**$R^n$**空间的两组基，线性变换**$\sigma$**在**$\xi_1,\xi_2,\text{L},\xi_n$**和**$\eta_1,\eta_2,\text{L},\eta_n$**下的矩阵分别为**$A$**和**$B$**，证明：**$A$**和**$B$**是相似的.**

证明： 设可逆矩阵P**是基**$\xi_1,\xi_2,\text{L},\xi_n$**到基**$\eta_1,\eta_2,\text{L},\eta_n$**的过度矩阵，即：**

$(\eta_1,\eta_2,\text{L},\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\text{L},\xi_n)P$，L L (5分)

因为 $\sigma(\xi_1,\xi_2,\text{L},\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\text{L},\xi_n)A$，$\sigma(\eta_1,\eta_2,\text{L},\eta_n)=(\eta_1,\eta_2,\text{L},\eta_n)B$，

所以

$$\sigma(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=\sigma((\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)P)$$
$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)AP=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)P^{-1}AP, \quad \cdots\cdots \quad (8分)$$

根据同一线性变换在同一组基下的矩阵是惟一的，可以得到

$B=P^{-1}AP$，也即矩阵 A 和 B 是相似的。…… (10分)

八、（15 分）如果向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，证明：表示方法是惟一的充分必要条件是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的。

证明：（必要性）设 β 由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出且表示方法惟一为：

$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m$，

设 $u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+\cdots+u_m\alpha_m=0$，则有

$\beta=(l_1+u_1)\alpha_1+(l_2+u_2)\alpha_2+\cdots+(l_m+u_m)\alpha_m$，…… (5分)

由于表示方法惟一，所以可以得到：$u_i=0, (i=1,2,\cdots,m)$，

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。…… (8分)

（充分性）假设有两种表示方法：$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m$ 和 $\beta=u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+\cdots+u_m\alpha_m$，

上面两式相减得到：$(l_1-u_1)\alpha_1+(l_2-u_2)\alpha_2+\cdots+(l_m-u_m)\alpha_m=0$，

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，所以有 $l_i-u_i=0,\quad i=1,2,\cdots,m$

说明表示方法惟一。…… (15分)

九、（15 分）设 A 是 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，B' 为 B 的转置矩阵，证明 $B'AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$。

解：（必要性）因为 $B'AB$ 为正定矩阵，所以对任意的列向量 $x\neq 0$，有 $x'(B'AB)x>0$，即

$(Bx)'A(Bx)>0$，于是 $Bx\neq 0$。…… (5分)

因此，方程 $Bx=0$ **只有零解，从而** $r(B)=n$ **。**L L　(8分)

（充分性）由于 $(B'AB)'=B'A'B=B'AB$**，故** $B'AB$ **为实对称矩阵。**L L　(10分)

如果 $r(B)=n$，则线性方程组**方程** $Bx=0$ **只有零解，从而对任意的** n **维实列向量** $x\neq 0$**，有** $Bx\neq 0$ **。**L L　(13分)**，**

又 A **是正定矩阵，所以对于** $Bx\neq 0$ **有** $(Bx)'A(Bx)>0$**，于是当** $x\neq 0$ **时，** $x'(B'AB)x>0$ **。**

故 $B'AB$ **为正定矩阵。**L L　(15分)