一、（20 分）解答以下三个小题：

（1）用分析定义证明：如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0$.（13 分）

（2）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0$，是否一定有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$？为什么？（3 分）

（3）计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$.（4 分）

二、（12 分）如果函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f'(x)<-1$，$f(0)=1$，试证：在区间 $(0,1)$ 内存在唯一的 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

三、（12 分）求函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$ 的不定积分.

四、（10 分）计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}$.

五、（12 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$，试求：

（1）$a_n=\int_0^2 f(x)e^{-nx}dx \quad (n=1,2,\cdots)$；（8 分）

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n$.（4 分）

六、（10 分）证明积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-xy}}{1+x^2}dx$ 关于 $y\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

七、（21 分）判断下列三个小题中级数的敛散性.（每小题 7 分）

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{\alpha}}{\beta^n}, (\beta>0)$；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$；　（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

八、（25 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

（1）计算函数 $f(x,y)$ 的偏导数；（10 分）

（2）问函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续？是否可微？为什么？（8 分）

（3）问偏导函数在 $(0,0)$ 点是否连续？为什么？（7 分）

九、（12 分）计算曲线积分 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周（$R\neq 1$），取逆时针方向.

十、（16 分）解答以下两个小题：

（1）证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$；（8 分）

（2）计算 $\iint\limits_{R^2} \min\{x,y\}\cdot e^{-x^2-y^2}dxdy$.　（8 分）

河南科技大学

2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题答案及评分标准

科目代码：636　　　　科目名称：数学分析

一、（20 分）解答以下三个小题：

（1）用分析定义证明：如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0$．（13 分）

（2）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0$，是否一定有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$？为什么？（3 分）

（3）计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$．（4 分）

证：（1）$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists N\in N^+$，$\forall n>N$：$|x_n|<\varepsilon/2$．　…… 2 分

利用三角不等式，得 $\left|\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right| \le \left|\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{n}\right| + \dfrac{|x_{N+1}|+|x_{N+2}|+\cdots+|x_n|}{n}$　…… 5 分

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{n}=0$（$\because x_1+x_2+\cdots+x_N=c$ 常数）　…… 7 分

对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists N_1\in N^+$，$n>N_1$：$\left|\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{n}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$．　…… 9 分

$$\frac{|x_{N+1}|+|x_{N+2}|+\cdots+|x_n|}{n}<\frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$　…… 11 分

取 $N'=\max\{N,N_1\}$，则 $\forall\varepsilon>0, \exists N'\in N^+$，当 $n>N'$ 时，有

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0.$$　…… 13 分

（2）不一定.　…… 1 分

反例：数列 $x_n=(-1)^{n-1}$，$n\in\mathrm{N}$．有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0$，但数列 $\{x_n\}$ 发散.　…… 3 分

（3） $\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ …… 2 分

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\text{L}\ +\frac{1}{n}}{n}=0$$ …… 4 分

二、（12 分）如果函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f'(x)<-1$， $f(0)=1$，试证：在区间 $(0,1)$ 内存在唯一的 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

证：由已知， $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导. 在 $[0,1]$ 上应用 Lagrange 中值定理，得

$f(1)-f(0)=f'(\xi_1)\cdot f(0)$， $\xi_1\in(0,1)$， …… 5 分

$f(1)=f(0)+f'(\xi_1)f(0)<f(0)-f(0)=0$， …… 7 分

由零点存在定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$. …… 9 分

再证零点唯一，只要证函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调，而由 $f'(x)<-1<0$，即知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调减少，从而上述 ξ 是唯一的. …… 12 分

三、（12 分）求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\ , & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$ 的不定积分.

解： $x<0$ 时， $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C_1$ …… 3 分

$x>0$ 时， $\int\sin x dx=-\cos x+C_2$ …… 6 分

得出 $C_1=-1+C_2=C$ …… 8 分

$$\int f(x)dx=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+C\ , & x\le 0\\ -\cos x+1+C, & x>0\end{cases}$$ …… 12 分

四、（10 分）计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}\int_0^x e^{u^2}du}{e^{2x^2}}$ …… 4 分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\int_0^x e^{u^2}du}{e^{x^2}}$ …… 5 分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}$ …… 9 分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ …… 10 分

五、（12 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases}$，试求

（1）$a_n=\int_0^2 f(x)e^{-nx}dx\quad(n=1,2,\mathrm{L}\ )$；（8 分）

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n$.（4 分）

解：（1）$a_n=\int_0^1 xe^{-nx}dx+\int_1^2(2-x)e^{-nx}dx$ …… 3 分

$=\dfrac{\left(e^{-n}-1\right)^2}{n^2}$ …… 8 分

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{-n}-1\right)^2=1$ …… 4 分

六、（10 分）证明积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-xy}}{1+x^2}dx$ 关于 $y\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

证： $\because\ \left|\dfrac{e^{-xy}}{1+x^2}\right|\le\dfrac{1}{1+x^2}$ ， $\begin{array}{l}0\le x<+\infty\\ 0\le y<+\infty\end{array}$ ……… 4 分

而 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2}$ 收敛， ……… 8 分

由 *Weierstrass* 判别法，知积分对 $y\in[0,+\infty)$ 一致收敛. ……… 10 分

七、（21 分）判断下列三个小题中级数的敛散性.（每小题 7 分）

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{\beta^{n}}$, $(\beta>0)$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$； (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

解:(1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\beta}$ ……… 3 分知

$\beta>1$收敛；$\beta<1$发散； ……… 5 分

$\beta=1$时$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-\alpha}}$,$\alpha<1$收敛，$\alpha\geq1$发散. ……… 7 分

（2）由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{e}$，（或 $0<u_n\leq\frac{1}{n^2}$） ……… 4 分

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$收敛. ……… 7 分

（3）由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}=1$, ………4 分

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$发散. ……… 7 分

八、（25 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

（1）计算函数$f(x,y)$的偏导数；（10 分）

（2）问函数$f(x,y)$在$(0,0)$点是否连续？是否可微？为什么？（8 分）

（3）问偏导函数在$(0,0)$点是否连续？为什么？（7 分）

解:(1) $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta x\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2}}=0$ …… 3 分

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , \qquad\qquad\qquad\qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ …… 8 分

对称地，$f_y'(x,y)=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , \qquad\qquad\qquad\qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ …… 10 分

(2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，从而在 $(0,0)$ 点也连续 …… 3 分

因为 $\Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)$，$f_x'(0,0)=0$，$f_y'(0,0)=0$.

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)}{\rho}=\dfrac{1}{\rho}\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\rho\sin\dfrac{1}{\rho}$.

所以 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\rho\sin\dfrac{1}{\rho}=0$， …… 7 分

即 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta f-\left[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y\right]}{\rho}=0$.

$\Delta f=f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y+o(\rho)$，$(\rho\to0)$

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微． …… 8 分

（3） 偏导函数在 $(0,0)$ 点不连续. …… 2 分

因为极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f_x'(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left[2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$不存在：

由 $\lim\limits_{x\to0+}f_x'(x,x)=\lim\limits_{x\to0+}\left[2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{2}x}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{2}x}\right]$不存在，即知

（或由沿直线 $y=0$，$x\to0+$ 时极限不存在，即知）

所以 $f_x'(x,y)$ 在在 $(0,0)$ 点不连续． …… 6 分

同理，$f_y'(x,y)$在$(0,0)$点也不连续． …… 7 分

九、（12 分）计算曲线积分 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点$(1,0)$为中心，R 为半径的圆周（$R\neq 1$），取逆时针方向.

解：$P=\frac{-y}{4x^2+y^2}, Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，$(x,y)\neq(0,0)$

在不含原点的区域上积分 $I=\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 与路径无关. …… 2 分

当 $R<1$ 时，由 Green 公式，得 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0$. …… 4 分

当 $R>1$ 时，取足够小的椭圆 $C:4x^2+y^2=a^2$，使之含于 L 内，C 取逆时针方向，

由 Green 公式：$\oint_{L+C^-} \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0$， …… 8 分

$\therefore \oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_C \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\oint_C xdy-ydx=\frac{1}{a^2}\cdot 2\pi\cdot\frac{a}{2}\cdot a=\pi$. …… 12 分

十、（16 分）解答以下两个小题：

（1）证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$；（8 分）

（2）计算 $\iint\limits_{R^2} \min\{x,y\}\cdot e^{-x^2-y^2}dxdy$. （8 分）

证：（1）$\because \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} e^{-x^2-y^2}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{-r^2}rdr=\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$ …… 3 分

令 $a\to+\infty$，$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2-y^2}dy=\pi$ …… 5 分

而 $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2-y^2}dxdy=\pi$

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ …… 8 分

（2）$\iint\limits_{R^2} \min\{x,y\}\cdot e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint\limits_{D_1} xe^{-x^2-y^2}d\sigma+\iint\limits_{D_2} ye^{-x^2-y^2}d\sigma$ …… 2 分

$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\int_{-\infty}^{y}xe^{-x^2}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{x}ye^{-y^2}dy$ …… 4 分

$=2\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{2}e^{-2y^2}dy$ …… 6 分

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. …… 8 分