河南科技大学

2009年硕士研究生入学考试试题

考试科目代码： 636　　**考试科目名称：** 数学分析

（如无特殊注明，所有答案必须写在答题纸上，否则以“0”分计算）

一、(15 分) 解答以下两个小题：

(1) 设数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$发散，可否断定数列$(a).\{x_n+y_n\}$, $(b).\{x_ny_n\}$也发散呢?举出适当的例子. (10 分)

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 及$\{y_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$为任意数列,能否断定$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$?举出适当的例子.

(5 分)

二、(14 分) 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

三、(12 分) 证明函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0; \end{cases}$$

有不连续的导函数.

四、(14 分) 设$f'(\ln x)=\begin{cases} 1, & 0<x\leq 1 \\ x, & 1<x<+\infty \end{cases}$, 及$f(0)=0$, 求$f(x)$.

五、(15 分) 设$f(x)$为连续正值函数,证明当$x\geq 0$时,函数$\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$是单调增加函数.

六、(15 分) 研究级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$的绝对收敛性与条件收敛性.

七、(27 分) 设函数$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0); \end{cases}$

证明：(1) $f(x,y)$在点$(0,0)$的邻域中连续；(9 分)

(2) 偏导函数$f_x'(x,y)$和$f_y'(x,y)$在点$(0,0)$的邻域中有界；(9 分)

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

(3) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微. (9 分)

八、(10 分) 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x^2+y^2}dx$ 关于 $y(y\geq a>0)$ 一致收敛.

九、(12 分) 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+z\,dxdy$, 其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2(0\leq z\leq 1)$, 曲面的法向量与 z 轴的正向的夹角为锐角.

十、(16 分) 解答以下两个小题：

(1) 计算 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ $(b>a>0)$；(7 分)

(2) 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln\frac{b}{a}$ $(b>a>0)$. (9 分)

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

河南科技大学

2009 年攻读硕士学位研究生入学考试试题答案及评分标准

科目代码： 636 科目名称： 数学分析

一、(15 分) 解答以下两个小题：

(1) 设数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$发散，可否断定数列：(a).$\{x_n+y_n\}$，(b).$\{x_ny_n\}$也发散呢?举出适当的例子.

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,及$\{y_n\}$为任意数列,能否断定：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$?举出适当的例子.

解：(1) 不能.例如

(a) $x_n=(-1)^n$， $y_n=(-1)^{n+1}$都发散,但$x_n+y_n=0$是收敛的. ……5 分

(b) $x_n=(-1)^n$， $y_n=(-1)^n$都发散,但$x_ny_n=1$是收敛的. ……10 分

(2) 不能. 例如

$x_n=\frac{1}{n}\to 0,\quad y_n=n,\quad$ 则 $x_ny_n=1,\quad \lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=1\neq 0.$ ……15 分

二、(14 分) 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

证：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数N, 使当 $n>N$ 时, 有

$$|x_n-a|<\varepsilon \qquad \text{……6 分}$$

又因 $\big||x_n|-|a|\big|\le|x_n-a|$, 故当 $n>N$ 时,

$$\big||x_n|-|a|\big|<\varepsilon \qquad \text{……12 分}$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. ……14 分

三、(12 分) 证明函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有不连续的导函数.

证：当$x\neq 0$时，$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$. ……3 分

它在$x=0$处的导数为：

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0. \qquad \text{……8 分}$$

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

所以

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在，所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点不连续. ……12 分

四、(14 分) 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, 0<x\leq 1\\ x, 1<x<+\infty\end{cases}$, 及 $f(0)=0$, 求 $f(x)$.

解：当 $0<x\leq 1$ 时，由于 $f'(\ln x)=1$，所以

$\int f'(\ln x)d(\ln x)=\int d(\ln x)=\ln x+C_1$，即 $f(\ln x)=\ln x+C_1$， ……4 分

令 $x=1$，得 $C_1=0$ ，所以 $f(x)=x.$ ……6 分

当 $1<x<+\infty$ 时，$f'(\ln x)=x$，此时

$\int f'(\ln x)d(\ln x)=\int xd(\ln x)=\int dx=x+C_2$，即 $f(\ln x)=x+C_2$， ……11 分

再由 $f(\ln x)$ 在 $x=1$ 的连续性，知 $\lim\limits_{x\to 1+}f(\ln x)=f(\ln 1)=f(0)$，由此得

$C_2=-1$. 于是 ……13 分

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leq x\leq 1,\\ e^x-1, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$ ……14 分

五、(15 分) 设 $f(x)$ 为连续正值函数,证明当 $x\geq 0$ 时,函数 $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 是单调增加函数.

证：$\varphi'(x)=\dfrac{f(x)[x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt]}{[\int_0^x f(t)dt]^2}=\dfrac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{[\int_0^x f(t)dt]^2}$ ……8 分

由于 $f(x)>0,\quad x\geq 0,\quad 0\leq t\leq x,$ 所以 $\int_0^x (x-t)f(t)dt\geq 0,$ ……13 分

因此 $\varphi'(x)\geq 0.$ 即 $\varphi(x)$ 当 $x\geq 0$ 时是单调增加函数. ……15 分

六、(15 分) 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 的绝对收敛性与条件收敛性.

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

解：$a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$，$|a_n| = \dfrac{1}{n^p}$，

当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，即 $p>1$ 时，原级数绝对收敛. ……5 分

当 $0<p\le 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 但 $\left\{\dfrac{1}{n^p}\right\}$ 单调递减趋于零, 原级数为交错级数. 由莱布尼兹判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 即当 $0<p\le 1$ 时，原级数条件收敛. ……13 分

当 $p\le 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$, 原级数发散. ……15 分

七、(27 分) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

证明：(1) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域中连续；(9 分)

(2) 偏导数 $f_x'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域中有界；(9 分)

(3) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微. (9 分)

证：(1) 当 $(x,y)\ne(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 显然连续.

由 $|f(x,y)|=\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\dfrac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ ……5 分

知 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$, 故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域中连续. ……9 分

(2) $f_x'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ……4 分

当 $(x,y)\ne(0,0)$ 时, 由于 $\left|f_x'(x,y)\right|\le\dfrac{|y|^3}{(y^2)^{3/2}}=1$

故 $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域中有界. ……8 分

同理可证 $f_y'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域中有界. ……9 分

(3) 由于 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，且极限 ……3 分

$$\lim_{\rho\to 0+}\frac{f(x,y)-f(0,0)-xf_x'(0,0)-yf_y'(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0+}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在，因此函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微. ……9 分

八、(10 分) 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x^2+y^2}dx$ 关于 $y(y\ge a>0)$ 一致收敛.

证： 因为 $\left|\frac{\sin xy}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{x^2+a^2}$， ……4 分

而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx$ 收敛， ……8 分

由 $Weierstrass$ 判别法知，积分关于 $y(y\ge a>0)$ 一致收敛. ……10 分

九、(12 分) 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$, 其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$, 曲面的法向量与 z 轴的正向的夹角为锐角.

解：补充 Σ_1: $z=1(x^2+y^2\le 1)$，方向取下侧，设 Ω 是 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围的空间区域，由 $Gauss$ 公式 ……2 分

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)dydz+zdxdy=-\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz$$ ……6 分

$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz=-\tfrac{3}{2}\pi$$ ……9 分

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy=-\tfrac{3}{2}\pi-\iint\limits_{\Sigma_1}1dxdy=-\tfrac{\pi}{2}$$ ……12 分

十、(16 分) 解答以下两个小题：

(1) 计算 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ \ (b>a>0)$.(7 分)

(2) 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln\frac{b}{a}\quad(b>a>0)$. (9)

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

(1) 解： 由于 $\int_a^b x^y dy = \dfrac{x^b - x^a}{\ln x}$,

因此

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

而 $f(x,y) = x^y$ 在闭矩形 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续（这里定义 $0^y = 0,\ y\in[a,b]$），所以积分次序可以交换，即

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{1}{1+y} dy = \ln\frac{1+b}{1+a} \qquad \cdots\cdots 7\text{ 分}$$

(2) 证：由于

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

当 $y\in[a,b]$ 时，

$$\left|e^{-xy}\right| \le e^{-ax}$$

而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ 收敛，所以 $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致收敛， ……6 分

由积分次序交换定理

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy} dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$$

$$= \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a} \qquad \cdots\cdots 9\text{ 分}$$

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com