河南科技大学
2010 年硕士研究生入学考试试题

考试科目代码： 856　　**考试科目名称：** 高等代数

（如无特殊注明，所有答案必须写在答题纸上，否则以“0”分计算）

一.（40 分）以下各题只有一个答案是正确的，请选择正确的答案。

1. 设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，且 $|A|=a,|B|=b$，$C=\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$，则 $|C|=($　　　　$)$.

(A) ab.　　(B) $(-1)^{n+m}ab$.　　(C) $-ab$.　　(D) $(-1)^{nm}ab$

2. 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = ($　　　　$)$

(A) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$.　　(B) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$.

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$.　　(D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$.

3. 已知 $Q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & t \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, P 是三阶非零矩阵，且 $PQ=O$. 则 $t=$（　　）

(A) -1.　　(B) 1.　　(C) -2.　　(D) 2.

4. 设 n 阶行列式 $I_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0$

而 $n-1$ 阶行列式 $I_{n-1}\neq 0$. 则 $a=($　　$)$.

(A) 1.　　(B) -1.　　(C) $\dfrac{1}{n-1}$.　　(D) $-\dfrac{1}{n-1}$.

5. 设 $\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-2,2,0),\alpha_5=(2,1,5,10)$

则此向量组的一个极大线性无关组是(　　).

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.　　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$.　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$.

6. 设A是$m\times n$矩阵, 秩为r. C是n阶可逆矩阵，矩阵$B=AC$, B 的秩为r_1, 则(　　).

(A) $r>r_1$.　　(B) $r<r_1$.　　(C) $r=r_1$.　　(D) r_1与C有关.

7. 已知$Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$, P是三阶非零矩阵, 且$PQ=O$. 则(　　).

(A) $t\neq 6$ 时P的秩必为 2.　　(B) $t\neq 6$ 时P的秩必为 1.
(C) $t=6$ 时P的秩必为 2.　　(D) $t=6$ 时P的秩必为 1.

8. 矩阵$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\b&-1&0&a\\1&1&2&0\end{pmatrix}$的秩为 2, 则$(a,b)=($　　$)$.

(A) $(0,1)$.　　(B) $(-1,0)$.　　(C) $(0,-1)$.　　(D) $(0,1)$.

9. 下列矩阵中有一个不是正交矩阵, 它是(　　).

(A) $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&\cos\varphi\cos\theta\\-\sin\theta&\cos\theta&\cos\varphi\sin\theta\\\cos\varphi&0&-\sin\varphi\end{pmatrix}$.

(C) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&5&\sqrt{10}\\5&1&-\sqrt{10}\\\sqrt{10}&-\sqrt{10}&4\end{pmatrix}$.　　(D) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+1&\sqrt{3}-1\\\sqrt{3}-1&-\sqrt{3}-1\end{pmatrix}$.

10. 设$\alpha_1=(1,2,3,4)^T\in R^4,\alpha_2=(4,5,6,7)^T\in R^4$,则$V_1=\{\beta\mid\beta\in R^4,\beta\perp\alpha_i,i=1,2\}$ (　　).

(A) 不构成向量空间.　　(B) 构成 1 维向量空间.
(C) 构成 2 维向量空间.　　(D) 构成 3 维向量空间.

二.（20 分）证明下列命题：

(1). 如果多项式$f(x),g(x)$不全为零，证明：$\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}$与$\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$互素。

(2). 证明：x_0是$f(x)$的k重根的充分必要条件是$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{k-1}(x_0)=0$而

$f^k(x_0) \neq 0$.

三.（15 分）已知行列式$D=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -11 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}$. 求 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。

四.（20 分）计算n 阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$.

五.（10 分）写出一个三元齐次线性方程组，使它的基础解系为$\eta=(1,-1,2)$.

六.（15 分）设数域P 上的 3 维空间V 的线性变换A 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

求线性变换A^2+2A-A^{-1}在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵。

七.（15 分）设V 是数域F 上的$n\times n$矩阵全体组成的线性空间。$M\in V$. σ是V 的变换，定义如下：$\sigma(A)=AM-MA$. 证明σ是V 的线性变换。

八.（15 分）设σ是n维欧氏空间V 的一个对称变换．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$ 的任意一个标准正交基．$A=(a_{ij})$是σ关于这个基的矩阵．那么A是实对称矩阵.

河南科技大学

2010 年硕士研究生入学考试试题答案及评分标准

考试科目代码：856　考试科目名称：高等代数

一.（40 分）答：

1.(D)　2.(D)　3.(A)　4.(D)　5.(B)　6.(C)　7.(B)　8.(D)　9.(D)　10.(C)

二.（20 分）证明下列命题：

(1). 如果多项式 $f(x), g(x)$ 不全为零，证明：$\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}$ 与 $\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 互素。

(2). 证明：x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{k-1}(x_0)=0$ 而 $f^{k}(x_0)\neq 0$.

答：(1).证： 存在多项式 $u(x),v(x)$， 使 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.　(4 分)

因而 $u(x)\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1$.　(7 分)

由定理 3, $\left(\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))},\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$.　(10 分)

(2). 必要性：设 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根。 那么 x_0 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根，……，是 $f^{k-1}(x)$ 的 1 重根，是 $f^{k}(x)$ 的 0 重根，即不是 $f^{k}(x)$ 的根，（3 分）所以 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{k-1}(x_0)=0$ 而 $f^{k}(x_0)\neq 0$.（5 分）

充分性：设 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{k-1}(x_0)=0$ 而 $f^{k}(x_0)\neq 0$. 设 x_0 是 $f(x)$ 的 l 重根。由必要性的证明 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{l-1}(x_0)=0$ 而 $f^{l}(x_0)\neq 0$. 从而 $l=k$.(10 分)

三.（15 分）已知行列式 $D=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -11 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}$. 求 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。

解：考虑行列式$C=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 7 & 1 & 3\end{vmatrix}$，按它的第三列展开。（5 分）由于$C$和$D$除了第三列外均相同，故$C=A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$，（10 分）而计算可得

$$C=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 7 & 1 & 3\end{vmatrix}=2.$$ 所以$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=2$.（15 分）

四.（20 分）计算n 阶行列式$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1}\\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{vmatrix}$.

解：按第一列展开。得：

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1}\\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{vmatrix}$$

$$=a_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b_n\begin{vmatrix}b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1}\end{vmatrix}\quad （10 分）$$

$$=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n \qquad （20 分）$$

五.（10 分）写出一个三元齐次线性方程组，使它的基础解系为$\eta=(1,-1,2)$.

解：考虑以$\eta=(1,-1,2)$为解的方程$k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3=0$，

那么$k_1\cdot 1+k_2\cdot(-1)+k_3\cdot 2=0$.（3 分）

把它看成k_1,k_2,k_3的方程。得到基础解系$(1,1,0),(-2,0,1)$.（7 分） 由此得到方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

它以$\eta=(1,-1,2)$为基础解系。（10 分）

六.（15 分）设数域P上的 3 维空间V的线性变换A在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&3&-1\\1&4&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

求线性变换$A^{2}+2A-A^{-1}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵。

解：线性变换$s^{2}-s-s^{-1}$在基a_1,a_2,a_3下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&3&-1\\1&4&0\\0&-1&0\end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix}1&3&-1\\1&4&0\\0&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3&-1\\1&4&0\\0&-1&0\end{pmatrix}^{-1}$$ （5 分）

由于 $$\begin{pmatrix}1&3&-1\\1&4&0\\0&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&4\\0&0&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$ （10 分）

所以 $$\begin{pmatrix}1&3&-1\\1&4&0\\0&-1&0\end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix}1&3&-1\\1&4&0\\0&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3&-1\\1&4&0\\0&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}6&21&-7\\7&27&0\\0&-7&-1\end{pmatrix}$$ （15 分）

七.（15 分）设V是数域F上的$n\times n$矩阵全体组成的线性空间。$M\in V$. σ是V的变换，定义如下：$\sigma(A)=AM-MA$. 证明σ是V的线性变换。

解：设$A,B\in V$， $k\in F$,

$\sigma(A+B)=(A+B)M-M(A+B)=AM-MA+BM-MB=\sigma(A)+\sigma(B)$（8 分）

$\sigma(kA)=(kA)M-M(kA)=k(AM-MA)=k\sigma(A)$

所以σ是V的线性变换。（15 分）

八.（15 分）设σ是n维欧氏空间V的一个对称变换．$\alpha_1,\alpha_2,\mathrm{L}\ ,\alpha_n$是$V$的任意一个标准正交基．$A=(a_{ij})$是$\sigma$关于这个基的矩阵．那么$A$是实对称矩阵．

解：我们有　$\sigma(\alpha_j)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\alpha_k, 1\le j\le n.$（5 分）

因为，σ 是对称变换，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一个标准正交基，所以

$$a_{ji}=(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\alpha_k,\alpha_j)=(\sigma(\alpha_i),\alpha_j)=(\alpha_i,\sigma(\alpha_j))$$ ……………………………………（10 分）

$$=(\alpha_i,\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\alpha_k)=a_{ij}.$$

所以 A 是实对称矩阵．………………………………………………………………（15 分）