2010年硕士研究生入学考试试题

考试科目代码： 636　　**考试科目名称：** 数学分析

（如无特殊注明，所有答案必须写在答题纸上，否则以“0”分计算）

一、（12分）按数列极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^3+1}=0$.

二、（14分）若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，证明：$f^2(x)$ 也在点 x_0 连续.

三、（14分）证明：$f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

四、（16分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且导函数连续.证明

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$$

五、（16分）证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 在区间 $(0,\pi)$ 内条件收敛.

六、（14分）证明：函数序列 $s_n(x)=(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

七、（16分）通过自变量变换 $\begin{cases} u=x+y \\ v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\end{cases}$,变换方程

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

八、（16 分）计算：$\int_L ydx+zdy+xdz$, 其中 L 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2az \\ x+z=a(a>0)\end{cases}$, 若从 z 轴的正向看去，L 的方向为逆时针方向.

九、（16分）设 D 是两条直线 $y=x$, $y=4x$ 和两条双曲线 $xy=1, xy=4$ 所围成的区域,

$F(u)$ 是具有连续导数的一元函数,记 $f(u)=F'(u)$.证明

$$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\ln 2\int_1^4 f(u)du,$$

其中 ∂D 的方向为逆时针方向.

十、（16分）证明：含参变量积分 $I=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos 2xtdt$ 满足方程 $\dfrac{dI}{dx}+2xI=0$.

河南科技大学

2010 年硕士研究生入学考试试题答案及评分标准

考试科目代码： 636 考试科目名称： 数学分析

一、（12 分）按数列极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^3+1}=0$.

证明：$\left|\dfrac{2n}{n^3+1}\right|<\dfrac{2}{n^2}$ ————4 分

任给 $\varepsilon>0$，要 $\left|\dfrac{2n}{n^3+1}\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{2}{n^2}<\varepsilon$，即只要 $n>\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$. ————10 分

取 $N=\left[\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}\right]$，则当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{2n}{n^3+1}\right|<\varepsilon$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^3+1}=0$. ————12 分

二、（14 分）若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，证明 $f^2(x)$ 也在点 x_0 连续.

证明：设 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $\forall 0<\varepsilon<1,\exists\delta>0,\forall|x-x_0|<\delta$，

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$ ————4 分

同时 $|f(x)+f(x_0)|\le|f(x)-f(x_0)|+2|f(x_0)|<1+2|f(x_0)|$， ————8 分

于是 $\left|f^2(x)-f^2(x_0)\right|<\left(1+2|f(x_0)|\right)\varepsilon$. ————12 分

所以 $f^2(x)$ 在点 x_0 连续. ————14 分

三、（14 分）证明 $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证明：$\forall x,x'\in(-\infty,+\infty)$，

$$|f(x)-f(x')|=|a||x-x'|,$$ ————4 分

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}$，当 $|x-x'|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$， ————12 分

所以 $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. ————14 分

四、（16 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且导函数连续.证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$$

证明：由于 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,因此存在 $M=\max\limits_{0\le x\le 1}|f'(x)|$ ————2 分

$$\int_0^1 x^n f(x)dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}f(x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx$$

$$=\frac{1}{n+1}f(x)-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx,$$ ————8 分

又因

$$\left|\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx\right| \le M\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{M}{n+2}\to 0,$$ ————12 分

所以

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left[f(1)-\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx\right]=f(1)$$ ————16 分

五、（16 分）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在区间 $(0,\pi)$ 内条件收敛.

证明：$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \ge \frac{\sin^2 nx}{n}=\frac{1-\cos 2nx}{2n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n},$ ————4 分

由于数列 $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ 单调趋于零,且部分和数列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos 2kx\right\}$ 有界,

由 Dirichlet 判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n}$ 收敛, ————10 分

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|$ 在区间 $(0,\pi)$ 内发散 ————13 分

原级数收敛性显然,因此原级数在区间 $(0,\pi)$ 内条件收敛. ————16 分

六、（14 分）证明函数序列 $s_n(x)=(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

证明：$\{s_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上收敛于 $s(x)=0$，由

$$\left|s_n(x)-s(x)\right|=\left(1-x\right)x^n,$$ ————5 分

及 $\left[(1-x)x^n\right]'=x^{n-1}\left[n-\left(n+1\right)x\right]$,

易知$\left|s_n(x)-s(x)\right|$在$x=\dfrac{n}{n+1}$取到最大值，从而 ————10 分

$$d\left(s_n,s\right)=\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{n+1}\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to 0\left(n\to 0\right).$$

所以，函数序列$s_n(x)=(1-x)x^n$在$[0,1]$上一致收敛. ————14 分

七、（16 分）通过自变量变换$\begin{cases}u=x+y\\ v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\end{cases}$,变换方程

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$ ————3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2}{x^3}\frac{\partial z}{\partial v},$$ ————6 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v},$$ ————9 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x^2y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$ ————12 分

代入原方程,得

$$\frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{x^2y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

注意到$v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{u}{xy}$, 即$xy=\dfrac{u}{v}$,于是就有

$$\frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{x^2y^2}=\frac{\left(x+y\right)^2}{x^2y^2}\left(x-y\right)^2=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2\left[\left(x+y\right)^2-4xy\right]$$

$$=v^2\left(u^2-4\frac{u}{v}\right)=uv\left(uv-4\right).$$

从而得变换后的方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{2}{u\left(4-uv\right)}\frac{\partial z}{\partial v}.$$ ————16 分

八、（16 分）计算 $\int_L ydx+zdy+xdz$, 其中 L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2az\\ x+z=a(a>0)\end{cases}$, 若从 z 轴的正向看去，L 的方向为逆时针方向.

解：设 $\sum$ 是 L 所围的平面 $x+z=a\left(a>0\right)$ 的部分，方向由右手法则确定（即取上侧）. $\sum$ 上任

一点的单位法向量 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, ————6 分

由 Stokes 公式,

$$\int_L ydx+zdy+xdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$$ ————13 分

$$=-\sqrt{2}\iint_\Sigma dS=-\sqrt{2}\pi a^2.$$ ————

16 分

九、（16 分）设 D 是两条直线 $y=x$, $y=4x$ 和两条双曲线 $xy=1$, $xy=4$ 所围成的区域,

$F(u)$ 是具有连续导数的一元函数,记 $f(u)=F'(u)$.证明

$$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\ln 2\int_1^4 f(u)du\ ,$$

其中 ∂D 的方向为逆时针方向.

证明：由 Green 公式,得

$$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\iint_D f\left(xy\right)dxdy$$ ————4 分

作变换$u=xy,v=\dfrac{y}{x}$,则此变换将区域D变为

$$D_{uv}=\{(u,v)|1\le u\le 4,1\le v\le 4\}$$ ————9 分

变换的 Jacobi 行列式为$J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{2v}$,于是 ————11 分

$$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\iint_D f(xy)dxdy=\iint_{D_{uv}}\frac{f(u)}{2v}dudv$$

$$=\int_1^4 f(u)du\int_1^4\frac{1}{2v}dv=\ln 2\int_1^4 f(u)du$$

所以

$$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\ln 2\int_1^4 f(u)du\ .$$ ————16 分

十、（16 分）证明含参变量积分$I=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos 2xtdt$满足方程$\dfrac{dI}{dx}+2xI=0$.

证明：记 $f(x,t)=e^{-t^2}\cos 2xt$，则 $f_x(x,t)=-2te^{-t^2}\sin 2xt$.这时有 ————2 分

$$|f_x(x,t)|=|-2te^{-t^2}\sin 2xt|\le 2te^{-t^2},-\infty<x<+\infty,0\le t<+\infty,$$

而反常积分$I=\int_0^{+\infty}te^{-t^2}dt$收敛,由 Weierstrass 判别法,

$$\int_0^{+\infty}f_x(x,t)dx=-2\int_0^{+\infty}te^{-t^2}\sin 2xtdt$$

关于x在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.应用积分号下求导定理,得到 ————8 分

$$\frac{dI}{dx}=-2\int_0^{+\infty}te^{-t^2}\sin 2xtdt=e^{-t^2}\sin 2xt\Big|_0^{+\infty}-2x\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos 2xtdt$$

$$=-2xI\ .$$ ————14 分

所以

$$\frac{dI}{dx}+2xI=0\ .$$ ————16 分