河南科技大学

2011 年硕士研究生入学考试试题

考试科目代码： 636　　**考试科目名称：** 数学分析

（如无特殊注明，所有答案必须写在答题纸上，否则以“0”分计算）

一、(13 分) 设数列 $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$，试用柯西收敛原理证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

二、(13 分) 如果对任意 $\delta > 0$，函数 $f(x)$ 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上连续, 解答以下小题：

(1) 证明函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续；

(2) 能否断定函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 为什么?

三、(14 分) 证明函数 $f(x) = x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

四、(16 分) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上二阶可导, 并且在区间 $[0,2]$ 上有 $|f(x)| \le 1$，$|f''(x)| \le 1$, 求证在区间 $[0,2]$ 上有 $|f'(x)| \le 2$.

五、(11 分) 证明： $\displaystyle\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)\,dx$，$(a > 0)$.

六、(16 分) 分别讨论函数 $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \ln(1 + n^2 x^2)$ 在区间 $[0,1]$ 上的连续性、可积性与可微性.

七、(11 分) 证明函数 $z = x^n f(\dfrac{y}{x^2})$ 满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$$

其中 f 为任意的可微函数.

八、(12 分) 计算 $\displaystyle\int_L e^x[(1-\cos y)dx - (y - \sin y)dy]$，其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从 $A(\pi, 0)$ 到 $O(0,0)$ 的一段.

九、(14 分) 计算曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$

其中$\sum$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$, 方向取外侧.

十、(14 分) 设L是平面$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$上的简单闭曲线，它所包围的区域$D$的面积为$S$，其中$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$是平面取定方向上的单位向量. 证明

$$S = \frac{1}{2}\int_L \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

其中L的定向与平面的定向符合右手定则.

十一、(16 分) 计算含参变量积分

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}dx \quad (b > a > 0)$$

河南科技大学

2011 年硕士研究生入学考试试题答案及评分标准

考试科目代码： 636 考试科目名称： 数学分析

一、（13 分）设数列 $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$，用柯西收敛原理证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明:不妨设 $m > n$

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{m^2}$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots + \frac{1}{(m-1)m}$$ ___4分

$$= (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + \cdots\cdots + (\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m})$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$ ___9分

$\forall \varepsilon > 0$，取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $m > n > N$ 时，必有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

所以数列 $\{x_n\}$ 收敛. ___13 分

二、（13 分）若对任意 $\delta > 0$，函数 $f(x)$ 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上连续，解答以下小题：

(1) 证明函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续；

(2) 能否断定函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，为什么?

解:（1）证明： $\forall x \in (a,b), \exists \delta > 0$，使得 $x \in [a+\delta, b-\delta]$，

由于 $f(x)$ 在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在点 x 连续， ___4 分

由 x 的任意性，得到 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续. ___7 分

（2）不能得到 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 反例： $f(x) = \operatorname{sgn}\sqrt{x(1-x)}, x \in [0,1]$. ___11 分

对任意 $\delta > 0$，$f(x)$ 在 $[\delta, 1-\delta]$ 上连续，但 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不连续. ___13 分

三、（14 分）证明函数 $f(x) = x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

证明：$\forall x', x'' \in (-\infty, +\infty)$

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')| &= |(x'-x'')+(\sin x'-\sin x'')| \\ &\le |x'-x''|+|\sin x'-\sin x''| \le 2|x'-x''|\end{aligned}$$ ___7 分

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $|x'-x''| < \delta$ 时

$$|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$$ ___13 分

所以 $f(x) = x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续. ___14 分

四、(16 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上二阶可导, 且在 $[0,2]$ 上有 $|f(x)| \le 1$，$|f''(x)| \le 1$.

求证在 $[0,2]$ 上有 $|f'(x)| \le 2$.

证明:任取 $x \in [0,2]$, 由 Taylor 公式

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x)^2, \quad \xi_1 \in (0,x)$$

$$f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(2-x)^2, \quad \xi_2 \in (x,2)$$ ___6 分

上两式相减, 得

$$2f'(x) = f(2) - f(0) + \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2 - \frac{f''(\xi_2)}{2}(2-x)^2$$ ___9 分

于是当 $x \in [0,2]$ 时, 有

$$\begin{aligned}2|f'(x)| &\le |f(2)| + |f(0)| + \frac{|f''(\xi_1)|}{2}x^2 + \frac{|f''(\xi_2)|}{2}(2-x)^2 \\ &\le 2 + \frac{1}{2}[x^2 + (2-x)^2] = 3 + (x-1)^2 \le 3 + 1 = 4\end{aligned}$$

所以 $|f'(x)| \le 2$ ___16 分

五、(11 分) 证明: $\displaystyle\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)dx \quad (a > 0)$

证明: 设 $x = \sqrt{t}$, 则 ___3 分

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}} f(t)\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$ ___10 分

$$= \frac{1}{2}\int_0^{a^2} t f(t)dt$$

即 $$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)dx$$ ___11 分

六、（16 分）分别讨论函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$ 在区间 $[0,1]$ 上的连续性、可积性与可微性.

解：令 $u_n(x)=\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$

$$\left|\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)\right| \le \frac{1}{n^3}\ln(1+n^2)$$ ___4 分

$$\lim_{n\to\infty} n^2 g\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{n} = 0$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2)$ 收敛. ___8 分

由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$ 在区间 $[0,1]$ 一致收敛.

所以 $S(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的连续、可积. ___10 分

又 $$u_n'(x) = \frac{2x}{n(1+n^2x^2)}$$

$$\left|u_n'(x)\right| \le \frac{2|x|}{n\cdot 2n|x|} = \frac{1}{n^2} \quad (x\neq 0)$$ ___13 分

上式当 $x=0$ 时也成立.

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 一致收敛.

所以 $S(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微. ___16 分

七、（11 分）证明函数 $z = x^n f(\frac{y}{x^2})$ 满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$$

其中 f 为任意的可微函数.

证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=x[nx^{n-1}f(\frac{y}{x^2})-\frac{2x^n y}{x^3}f'(\frac{y}{x^2})]+2y\frac{x^n}{x^2}f'(\frac{y}{x^2})$$ ___8 分

$$=nx^n f(\frac{y}{x^2})=nz$$ ___11 分

八、（12 分）计算 $\int_L e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从 $A(\pi,0)$ 到 $O(0,0)$ 的一段.

解：添加一条直线段 $\overline{OA}$（方向从 O 到 A），设这样得到的闭曲线所围区域为 D. 这时

$$P=e^x(1-\cos y) \qquad Q=e^x(\sin y-y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\sin y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x(\sin y-y)$$ ___4 分

利用 Green 公式，得到

$$\int_L e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]+\int_{\overline{OA}} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$$

$$=-\iint_D ye^x dxdy$$

$$=-\int_o^\pi e^x dx\int_0^{\sin x} ydy$$

$$=\frac{1}{5}(1-e^\pi)$$ ___9 分

$$\int_{\overline{OA}} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]=0$$

$$\int_L e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]==\frac{1}{5}(1-e^{\pi})$$ ___12 分

九、(14 分)计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$$

其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$,方向取外恻.

解:由 Gauss 公式

$$\iint_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$$

$$=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$ ___7 分

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi dr$$ ___14 分

$$=\frac{12}{5}\pi R^5$$

十、(14 分)设L是平面$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$上的简单闭曲线,它所包围的区域$D$的面积为$S$,其中$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是平面取定方向上的单位向量.证明

$$S=\frac{1}{2}\int_L\begin{vmatrix}dx & dy & dz\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

其中L的定向与平面的定向符合右手定则.

证明:由 Stokes 公式

$$\int_L\begin{vmatrix}dx & dy & dz\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$=\int_L(z\cos\beta-y\cos\gamma)dx+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)dy+(y\cos\alpha-x\cos\beta)dz$$ ___6 分

$$=\iint_D\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z\cos\beta-y\cos\gamma & x\cos\gamma-z\cos\alpha & y\cos\alpha-x\cos\beta\end{vmatrix}dS$$

$$=2\iint_D(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS$$

$$=2\iint_D dS=2S$$

___13 分

所以

$$S=\frac{1}{2}\int_L\begin{vmatrix}dx & dy & dz\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

___14 分

十一、（16 分）计算含参变量积分

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad(b>a>0)$$

解：

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

$$=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\int_a^b x^y dy$$

$$=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$$

___6 分

$$\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{y+1}x^{y+1}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\Bigg|_0^1+\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{(y+1)^2}x^{y+1}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\Bigg|_0^1-\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{1+(y+1)^2}$$

___14 分

所以

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

$$=\int_a^b\frac{dy}{1+(y+1)^2}$$

___16 分

$$=\arctan(1+b)-\arctan(1+a)$$