$\cdots, Y_n$，求 θ 的最大似然估计(即 MLE)。

五、(本题 20 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立，同服从正态分布 $N(\theta, 1)$，求 θ^2 的一致最小方差无偏估计(UMVUE)，并证明：此 UMVUE 达不到罗一克拉美(CR)下界。

注意：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $X^2 \sim X^2(1, \delta)$，其中 $\delta = \mu^2/\sigma^2$，并且有 $E(X) = 1+\delta, D(X) = 2+4\delta$。

报考专业:数量经济学
考试科目:概率论与数理统计(B)

说明:1. 可用计算器;

2. 附统计用表。

一、(本题 20 分)

某厂产品的废品率为 0.03,现在要把产品装箱,若要以不小于 0.9 的概率保证每箱至少有 100 个正品,那么每箱至少要装多少个产品?

二、(本题 20 分)

1. 两名篮球队员轮流投篮,直到某人投中为止。如果第一名队员投中的概率为 0.4,第二名队员投中的概率为 0.6,求每名队员投篮次数的分布列。

2. 设$\{\xi_n\}$为具有有限方差的同分布的随机变量序列,且当$|k-l|\geqslant 2$时,ξ_k与ξ_l相互独立。试证明:$\{\xi_n\}$服从大数定律。

三、(本题 20 分)

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 为 $n+m$ 个独立的,同服从标准正态分布 $N(0,1)$的随机变量,求 $\xi=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2+\sum_{j=1}^{m}\eta_j^2}$ 的密度函数。

四、(本题 20 分)

假定等待某一特定事件出现所需时间为离散型随机变量,取值为 1,2,…,以 X 代表这一随机变量并假定概率 $P(X=k|\theta)=\theta^{k-1}\cdot(1-\theta),k=1,2,\cdots,0<\theta<1$。

现规定:

(i)若等待某一特定事件出现所需时间不超过某一正数 r,则 $P(X=k|\theta)=\theta^{k-1}\cdot(1-\theta),k=1,2,\cdots,r$。

(ii)若等待某一特定事件出现所需时间超过(i)中所述的正整数 r,则不论该特定事件出现所需时间为哪一个具体值,都以“$Y=r+1$”表示,并且 $P(Y=r+1|\theta)=1-P(X\leqslant r|\theta)=1-\sum_{k=1}^{r}\theta^{k-1}\cdot(1-\theta)=\theta^r$。

设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为独立获得的等待时间,其中“$Y_i=r+1$”的情况有 M 种,试根据 Y_1,Y_2,