已对 4/7

北方交通大学一九九五年硕士学位研究生入学考试试题

考试课程：高等代数　　　　共 2 页

一.（14分）对λ的不同值，讨论下面方程组是否有解，当方程组有解时并求解.

$$\begin{cases}(\lambda+1)x_1+x_2+x_3=\lambda^2+3\lambda\\ x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=\lambda^3+3\lambda^2\\ x_1+x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda^4+3\lambda^3\end{cases}$$

二.（10分）设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程组

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \quad 与 \quad x_1=x_2=\cdots=x_n$$

的解空间. 证明：$P^n=V_1\dotplus V_2$.（这里 P^n 是数域 P 上的 n 维线性空间）

三.（14分）对下面的对称矩阵 A，求正交阵 Q，使 $Q'AQ$ 成为对角阵.

$$\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$$

四.（10分）计算 n 阶行列式

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}\lambda&a&a&a&\cdots&a\\b&\alpha&\beta&\beta&\cdots&\beta\\b&\beta&\alpha&\beta&\cdots&\beta\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&\beta&\beta&\beta&\cdots&\alpha\end{vmatrix}$$

地址：北京市西直门外上园村
北京交通大学档案馆
邮政编码：100044

五.（12分） 令A^*是n级矩阵A的伴随矩阵，证明：$|A^*|=|A|^{n-1}$.（$n\geq 2$）.

六.（14分） 设$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$是n维线性空间V的两个线性变换，
证明： $\mathscr{A}\mathscr{B}$的秩 $\geq$ $\mathscr{A}$的秩 $+$ $\mathscr{B}$的秩 $-\ n$

七.（14分） 设$A=(a_{ij})$是一个n级正定实对称矩阵，证明：

$$|A|\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

八.（12分） 设A为一方阵，$g(\lambda)$为A的最小多项式，$f(\lambda)$为任一次数大于零的多项式。证明：方阵$f(A)$为非奇异的充分与必要条件是

$$(f(\lambda),\ g(\lambda))=1$$