61 15

北方交通大学一九九九年硕士学位研究生入学考试试题

考试课程：数学分析　　共 2 页

一. 计算下列极限的值（15分）

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{2n+1}+\dfrac{2}{2n+3}+\cdots+\dfrac{2}{4n-1}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)$ 　（已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$）

二. 已知 $a_n>0$，且 $a_n\le a_{n+1}$，讨论级数

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1\cdot a_2}+\frac{1}{a_1a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}+\cdots$$

的敛散性（10分）

三. 证明任意一个实数数列都有单调子列.（10分）

四. 试在球面坐标 $\{r,\theta,\varphi\}$，其中 r,θ,φ 满足

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi & 0\le r<+\infty,\ 0\le\theta\le\pi \\ z=r\cos\theta & 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$$

之下表出 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，这里 $u=u(x,y,z)$ 为一个二阶连续可微函数.（15分）

五. 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos tx}{x^p}\,dx$ $(0<p<1)$ 关于 $t\in[t_0,+\infty)$

15

一致收敛（$t_0>0$）（10分）

六. 计算三重积分的值

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz,$$

Ω为椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ （15分）

七. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微（$a<b$），且对任意 $x\in[a,b]$ $f'(x)\neq 0$. 试证 $f(x)$ 有连续的反函数（13分）

八. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则可适当交换各项的次序，得一新级数，并使其收敛到任何预先指定的有限数 S.（12分）