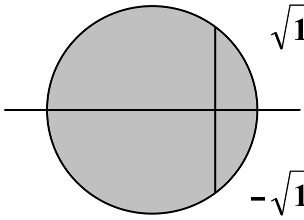
例 1.1《熟悉原理》设(X,Y)在 *xoy* 平面上由圆周 $x^2+y^2=1$ 所围成的区域 D 内服从均匀分布，试证明：X 与 Y 不相关也不相互独立。



证明：因为(X,Y)的联合分布密度 $p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & if \quad (x,y)\in D\\ 0, & other,\end{cases}$

所以，E(X)= $\iint\limits_{xoy} xp(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}xdydx=0,$

E(Y)= $\iint\limits_{xoy} yp(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}ydydx=0,$

E(XY) = $\iint\limits_{xoy} xyp(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}xydydx=0,$

cov(X,Y)=E(XY)-(EX)(EY)=0, ρ(X,Y)=0, X 与 Y 不相关。

又因为 $-1<x<1$ 时，

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},$$

$-1<y<1$ 时，

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},$$

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & if \quad -1<x<1\\ 0, & other,\end{cases}$$

$$p_Y(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & if \quad -1<y<1\\ 0, & other,\end{cases}$$

又由于 $p_X(0)=p_Y(0)=\frac{2}{\pi}$, $p(0,0)=\frac{1}{\pi}$,

$p(0,0)\neq p_X(0)=p_Y(0)$, 所以 X 与 Y 不相互独立。

例 1.2《熟悉方法》设 X 与 Y 的相关系数为 ρ，试求

X*=*a*+*b*X 与 Y*=*c*+*d*Y 的相关系数，其中 *a*、*b*、*c*、*d* 均为常数，且 *b*、*d* 不为零。

证明： $\mathrm{cov}(X^*,Y^*)=E[a+bX-E(a+bX)][c+dY-E(c+dY)]$

$=E[bX-bEX][dY-dEY]=E[b(X-EX)d(Y-EY)]$

$=bdE[(X-EX)(Y-EY)]=bd\,\mathrm{cov}(X,Y)$。

又因为 $D(X^*)=b^2D(X)$，$D(Y^*)=d^2D(Y)$，

$\sigma(X^*)=|b|\sigma(X)$，$\sigma(Y^*)=|d|\sigma(Y)$，

所以，$\rho(X^*,Y^*)=\dfrac{\mathrm{cov}(X^*,Y^*)}{\sigma(X^*)\sigma(Y^*)}=\dfrac{bd\,\mathrm{cov}(X,Y)}{|b||d|\sigma(X)\sigma(Y)}$

$=\pm\rho(X,Y)=\pm\rho$。

例 1.3《熟悉方法》已知随机变量 X 与 Y 的协方差矩阵为

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，**试求 U=X-2Y 与 V=2X-Y 的相关系数。**

解： 因为 $D(X)=1$, $\sigma(X)=1$, $D(Y)=4$, $\sigma(Y)=2$, $\mathrm{cov}(X,Y)=1$,

所以 $D(U)=D(X-2Y)=D(X)+D(2Y)-2\mathrm{cov}(X,2Y)=13$,

$D(V)=D(2X-Y)=D(2X)+D(Y)-2\mathrm{cov}(2X,Y)=4$,

$\mathrm{cov}(U,V)=E[(U-EU)(V-EV)]$

$=E\{[(X-2Y)-E(X-2Y)][(2X-Y)-E(2X-Y)]\}$

$=E\{[(X-EX)-2(Y-EY)][2(X-EX)-(Y-EY)]\}$

$=2E(X-EX)^2-5E[(X-EX)(Y-EX)]+2E(Y-EY)^2=5$,

$\rho(U,V)=\dfrac{\mathrm{cov}(U,V)}{\sigma(U)\sigma(V)}=\dfrac{5}{2\sqrt{13}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$。

习题 1.1

1. 设(X,Y)的分布密度

$$\mathbf{p}(x, y)=\begin{cases}6xy^2, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他地方},\end{cases}$$

试求 X 与 Y 的相关系数。

2. 设 X 与 Y 的相关系数为 ρ，试求 $aX+b$ 与 $cY+d$ 的相关系数，其中 a、b、c、d 均为常数，且 a、c 不为零。

3. 设 X_1、X_2、X_3、X_4 相互独立、同分布且数学期望及方差分别为 μ, σ^2，试求 $Y= X_1+X_2+X_3$ 与 $Z= X_2+X_3+X_4$ 的相关系数。

4. 已知 (X,Y,Z)的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 1 & 20 & 3 \\ -2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$，

试求 (1) (X,Y,Z)的相关系数矩阵;

(2)U=2X+3Y+Z 与 V=X-2Y+5Z 的相关系数。