第一章 概率论专题

§1.3 连续型随机变量的变换及变换后的分布

1. 二重积分的换元积分法

2. 二维连续型随机变量的变换及变换后的分布

3. 正态随机变量的非奇线性变换

4. 标准正态随机变量的正交变换

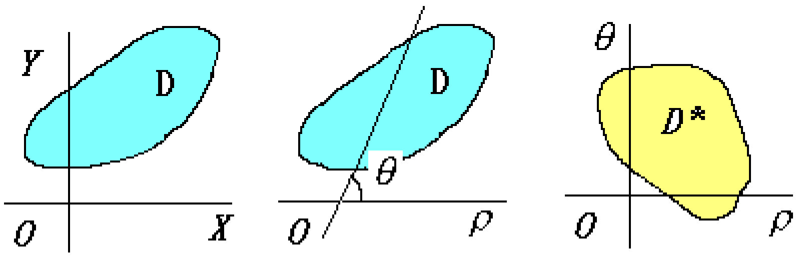
1. 二重积分的换元积分法

二维连续型随机变量的变换及变换后的分布与二重积分的换元积分法有关。

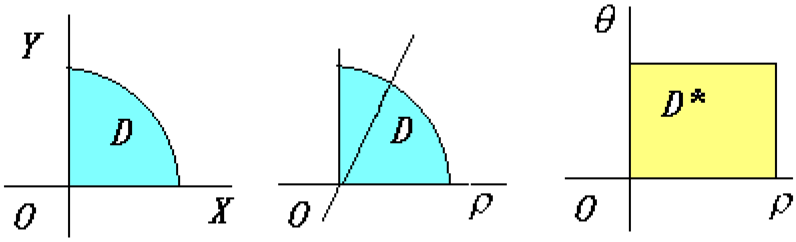
在极坐标系中计算二重积分的公式是换元积分法的特例，它可以表示为

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta}。$$

此公式说明：在极坐标系中计算二重积分时，要将变量 x 换为 $\rho\cos\theta$，变量 y 换为 $\rho\sin\theta$，$dx\,dy$ 换为 $\rho\,d\rho\,d\theta$，$f(x,y)$ 换为 $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$，区域 **D 换为 D***。 这里的 D*不再是直角坐标平面 xoy 上的区域，它是一个以 ρ 为横坐标轴，以 θ 为纵坐标轴的新直角坐标平面 $\rho o\theta$ 上的区域，区域 D 内的点 (x,y) 与区域 D*内的点 (ρ,θ) 一一对应。



直角坐标	极坐标	新直角坐标
平面 xoy	平面上	平面 $\rho o\theta$ 上
上的区域	上的区域	的区域



图中的区域 D 为四分之一圆，D*为矩形，即

$$D=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant \sqrt{R^2-x^2},\ 0\leqslant x\leqslant R\},$$

$$D^*=\{(\rho,\theta)|0\leqslant \rho\leqslant R,\ 0\leqslant \theta\leqslant \frac{\pi}{2}\}。$$

一般而言，如果变换 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$及其逆变换 $u=u(x,y),v=v(x,y)$使 xoy 平面上的区域 D 内的点(x,y)与 uov 平面上的区域 D*内的点(u,v)一一对应，则二重积分的换元计算公式可以表示为

$$\boxed{\iint_{D} f(x,y)\, d\sigma_{xy} = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\, d\sigma_{uv}},$$

式中的 $J(u,v)=\begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix}$称为 ***Jacobi*** 行列式。

当 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$时，ρ 与 θ 分别是上述公式中的 u 与 v，而 $J(\rho,\theta)=\rho$ 。

请注意：$|J(u,v)|$是 $J(u,v)$的绝对值。

2. 二维连续型随机变量的变换及变换后的分布

当二重积分换元积分以前的被积函数 $f(x,y)$ 是二维连续型随机变量(X,Y)的分布密度 $p(x, y)$，且

$U= u(X,Y)$，$V=v(X,Y)$，

使(X,Y)变换为(U,V)的函数 $u = u(x, y),v = v(x, y)$对应着唯一的反函数 $x = x(u,v)$，$y = y(u,v)$，偏导数

$x'_u(u,v)$、$x'_v(u,v)$，$y'_u(u,v)$，$y'_v(u,v)$

都存在、都连续时，(U,V)的分布密度

$$\boxed{p^*(u,v)=\begin{cases} p(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|, & (u,v)\in D^* \\ 0, & (u,v)\notin D^*, \end{cases}}$$

式中区域 D*内的点(u,v)与 $p(x, y)$取正值的区域 D 内的点(x, y)一一对应。

这里有两个等价的随机事件：

$\{(X,Y)\in D\}$和$\{(U,V)\in D^*\}$。

根据 $P\{(X,Y)\in D\}=P\{(U,V)\in D^*\}$，以及

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D p(x,y)\,d\sigma_{xy}$$

$$=\boxed{\iint_{D^*} P(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|d\sigma_{uv}},$$

$$P=\{(U,V)\in D^*\}=\boxed{\iint_{D^*} p^*(u,v)\,d\sigma_{uv}},$$

由两个二重积分相等、积分区域和记分变量相同，即可推出 (U,V)的分布密度。

$$\boxed{p^*(u,v)=\begin{cases} p(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|, & (u,v)\in D^* \\ 0, & (u,v)\notin D^* \end{cases}}$$

【例 3.1】设 X 与 Y 相互独立且都服从 N(0,1)分布，试用变换法论述（X+Y,X−Y）的分布密度并说明 X+Y 与 X−Y 相互独立。

解： X 与 Y 的分布密度、(X,Y)的分布密度依次为 $p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$p_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$，

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)。$$

设 $u=x+y$, $v=x-y$,解出 $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$,

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},\quad x^2+y^2=\frac{1}{2}(u^2+v^2),$$

且当 D 为 xoy 平面，$(x,y)\in D$，D*为 uov 平面，$(u,v)\in D^*$时，(x,y)与(u,v)一一对应，则

（X+Y,X−Y）的分布密度

$$p^*(u,v)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{u^2+v^2}{4}\right)\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4\pi}\exp\left(-\frac{u^2+v^2}{4}\right),$$

因此 **X+Y 的分布密度**

$$p_1^*(u)=\int_{-\infty}^{\infty}p^*(u,v)\,dv=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{u^2}{4}},$$

X−Y 的分布密度

$$p_2^*(v)=\int_{-\infty}^{\infty}p^*(u,v)\,du=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{v^2}{4}},$$

这里的 **X+Y 与 X−Y** 都服从 N(0,2)分布，根据联合分布中的$\rho=0$，判定 **X+Y 与 X−Y 相互独立。**

【例 3.2】设 X 与 Y 相互独立且都服从 N(0,1)分布，试用变换法论述（$\frac{1}{2}$X+Y,$\frac{1}{2}$X−Y）的分布密

度并说明$\frac{1}{2}$X+Y 与$\frac{1}{2}$X−Y 不相互独立。

解：X 与 Y 的分布密度、(X,Y)的分布密度依次为 $p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$p_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$，

$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$。

设 $u=\frac{1}{2}x+y$, $v=\frac{1}{2}x-y$,解出 $x=u+v$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$,

$J(u,v)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-1$，$x^2+y^2=\frac{5}{4}(u^2+v^2)+\frac{3}{2}uv$，

且当 D 为 xoy 平面，$(x,y)\in D$，D^*为 uov 平面，$(u,v)\in D^*$时，(x,y)与(u,v)一一对应，则

（$\frac{1}{2}$X+Y,$\frac{1}{2}$X−Y）的分布密度

$p^*(u,v)=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{5}{4}\left(u^2+v^2\right)+\frac{3}{2}uv\right]\right\}$，

再由$\frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1^2}=\frac{5}{4}$，$\frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_2^2}=\frac{5}{4}$，$\frac{-2\rho}{(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2}=\frac{3}{2}$，

解出$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\frac{5}{4}$，$\rho=-\frac{3}{5}$，因此（$\frac{1}{2}$X+Y,$\frac{1}{2}$X−Y）的分布为 $N(0,0,\frac{5}{4},\frac{5}{4},-\frac{3}{5})$，$\frac{1}{2}$X+Y 与$\frac{1}{2}$X−Y 的分布

同为 N(0,$\frac{5}{4}$)，根据联合分布中的$\rho \neq 0$，判定$\frac{1}{2}$X+Y与$\frac{1}{2}$X−Y 不相互独立。

【例 3.3】设 X 与 Y 相互独立且都服从 E(k)分布，试用变换法论述 X+Y 的分布密度。

解：X 与 Y 相互独立且都服从 E(k)分布时，

(X,Y)的分布密度

$$p(x,y)=\begin{cases} k^2 e^{-k(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0\ , & \text{其他地方。} \end{cases}$$

设 $u=x+y$, $v=x$,解出 $x=v$, $y=u-v$,

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1，\ x+y=u。$$

且当 D 为 $x>0, y>0$，$(x,y)\in$ D，D* 为 $v>0, u-v>0$，$(u,v)\in$ D*时，(x,y)与(u,v)一一对应，则

（X+Y, X）的分布密度

$$p^*(u,v)=\begin{cases} k^2 e^{-ku}, & (u,v)\in D^* \\ 0, & \text{其他地方。} \end{cases}$$

$$p_1^*(u)=\int_{-\infty}^{\infty} p^*(u,v)\,dv=\int_0^u k^2 e^{-ku}\,dv= k^2 u e^{-ku},$$

因此，X+Y 的分布密度

$$p_1^*(u)=\begin{cases} k^2 u e^{-ku}, & u>0 \\ 0, & \text{其他地方。} \end{cases}$$