

一、试解下列各题（本大题共 4 小题，每小题 6 分，总计 24 分）

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 - e^{\frac{2}{x}}} + \left| \frac{\sin x}{x} \right| \right]$ 。

2. 计算积分  $\int_{-\pi}^{\pi} (|x| + x) \sin^2 x dx$

3. 设二元函数  $z = (x + y)^x + (x + 1) \ln(1 + y)$ ，求  $dz|_{(1,0)}$ 。

4. 设函数  $f(x, y)$  连续，交换  $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx$  的次序。

二、试解下列各题（本大题共 4 小题，每小题 8 分，总计 32 分）

1. 判别积分  $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x \ln x} dx$  的收敛性，并指明是绝对收敛还是条件收敛？

2. 将函数  $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$  展成  $x$  的幂级数。

3. 求星形线  $x = a \cos^3 t$ ， $y = a \sin^3 t$  ( $a > 0$ ) 的全长。

4. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$  所确定，试求  $y = y(x)$  的驻点，并判断它是否为极值点？

三、试解下列各题（本大题共 6 小题，每小题 12 分，总计 72 分）

1. 计算曲线  $I = \oint_L \frac{-y dx + x dy}{4x^2 + y^2}$ ，其中  $L$  是不经过原点的任一光滑的简单闭曲线的正向。

2. 讨论函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$  在  $(0,0)$  处的可微性。

3. 计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy$ ，其中  $\Sigma$  是曲面

$z = 1 - x^2 - y^2$  ( $z \geq 0$ ) 的上侧。

4. 设  $a > 0$ ,  $x_1 > 0$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$  ( $n = 1, 2, \dots$ )，证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在，并求

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

5. 判别函数  $f(x) = \sin \sqrt{x}$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续性。

6. 计算积分  $I = \int_0^{+\infty} e^{-px} \frac{\sin bx - \sin ax}{x} dx, \quad p > 0, b > a.$

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 11 分，总计 22 分）

1. 证明：函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+n)^n}{n^{n+1}}$  在  $[0,1]$  上一致收敛。

2. 设函数  $f(x)$  在  $[0, a]$  上具有二阶连续导数，且  $|f''(x)| \leq M$ ， $f(x)$  在  $(0, a)$  内取到最大值，试证： $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma$ 。