2005年新疆大学数学分析考研试题

新疆大学2005年攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考学科专业：基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论

报考研究方向：各方向共用

考 试 科 目：330 数学分析　　　　　　　　　共2页

考 生 注 意：无论何种题型，试题答案请写在考场所发答题纸上，

写在试题上一律不予计分。

一、(每小题 8 分，共 80 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

2. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$.

3. 设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 上一致连续，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 上有界。

4. 设 $f(x)$ 是 $(-a,a)\ (a>0)$ 上的偶函数，且在 $x=0$ 处可导，证明：$f'(0)=0$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内可微. 证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)\qquad (a>0)$$

6. 计算 $\int\cos^2(\sqrt{x})\,dx$.

7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

8. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{2n}$ 的和函数 $S(x)$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n}$ 的和.

9. 设 $u=u(x,y)$ 由方程 $y=u+x^2u^3$ 所确定，求 $z=\cos u$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

10. 计算 $\iint\limits_{x^2+4y^2\le 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

1

二、(以下6题任选5题，每题14分，共70分)

1. 设 $f(x)$ 是从 $[a,b]$ 到 $[a,b]$ 的函数，而且

$$|f(x)-f(y)| \le \alpha|x-y|,\quad 0<\alpha<1,\quad x,y \in [a,b].$$

对任意取定的 $x \in [a,b]$，令 $x_1 = x$，$x_{n+1} = f(x_n)$ $(n=1,2,\ldots)$。
证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛数列.

2. 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

(i) 在 $[\alpha,\pi]$ $(0<\alpha<\pi)$ 上一致收敛

(ii) 在 $[0,\pi]$ 上不一致收敛.

3. 证明 $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx = 0$ $(p>0)$.

4. 设 $y(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$，证明：

(i) $y(x)$ 在 $x \ge 0$ 上连续，且 $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$;

(ii) $x>0$ 时，$y(x)$ 二次连续可微;

(iii) $y(x)$ $(x>0)$ 满足方程

$$y'' - y = \frac{1}{x}$$

5. 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上二次连续可微，证明:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Longleftrightarrow \int_C \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,ds = 0.$$

其中，C 是任意分段光滑简单闭曲线，$\mathbf{n}$ 是曲线 C 的单位外法向量，$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 是函数 u 沿方向 $\mathbf{n}$ 的方向导数.

6. 证明零点存在定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$, $f(b)$ 异号，则在 (a,b) 至少有 $f(x)=0$ 的一个根 ξ

2