电子科技大学

2007年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：427 线性代数

注意事项：1、所有答案必须写在答卷纸上，否则答案无效.

2、 十个大题，共150分.

1 (10分). 求行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ & \cdots & \cdots & \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$.

2 (14分). 证明：$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$，其中 A 是 n 阶矩阵(n>2)，A^* 是 A 的伴随矩阵.

3 (15 分). 求单位向量 β_3，使向量组 $\beta_1=(1,1,0),\beta_2=(1,1,1)$，$\beta_3$ 与 $\alpha_1=(0,1,1),\alpha_2=(1,2,1),\alpha_3=(1,0,-1)$ 的秩相同，且 β_3 可 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

4 (15分). 如果存在自然数 m，使 $P^m=0$，则称 P 为幂零矩阵. 设 B 是 n 阶幂零矩阵，A 为 n 阶可逆矩阵，且 $AB=BA$. 证明：$A-B,A+B$ 都可逆.

5 (15分). 设 $A_{m\times n}(m\le n)$，证明：对任意 m 维列向量 b，方程组 $Ax=b$ 都有解的充要条件是秩 $\mathrm{R}(A)=m$.

6 (15分). 已知三阶矩阵 A 与3维列向量 x，使得向量组 x,Ax,A^2x 线性无关且满足 $A^3x=3Ax-2A^2x$，

(1) 记 $P=(x,Ax,A^2x)$，求3阶矩阵 B，使 $A=PBP^{-1}$；

(2) 求行列式 $|A+I|$.

7 (15分). 证明：二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ (A 为对称矩阵)为正定二次型的充要条件是 A 的特征值全为正数.

8 (15分). 设 α,β 为 R^n 中的向量，(α,β)为内积，证明：$(\alpha,\beta)^2\le\|\alpha\|^2\|\beta\|^2$ 且

当且仅当α,β线性相关时等号成立.

9 (16 分). 设V_1,V_2分别是齐次方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，$x_1=x_2=\cdots=x_n$的解空间，证明：$P^n=V_1\oplus V_2$.

10 (20 分). 设$V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in R\}$是 R 上的 n 维线性空间，定义

$$T(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(0,x_1,\cdots,x_{n-1})$$

(1) 证明：T是V的一个线性变换，且$T^n=\theta$，其中θ为零变换.

(2) 求 Ker (T)及 Im (T)的维数.