电子科技大学
2008 年攻读硕士学位研究生入学试题
考试科目：代码 835 线性代数

注意事项：1、所有答案必须写在答卷纸上，否则答案无效.
2、八个大题，共 150 分.

一 (18 分). 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

二 (18 分). 设 A, B 为 n 阶矩阵, 证明: $R(AB) \le \min\{R(A),\ R(B)\}$. 这里 R($A$)表示矩阵 A 的秩.

三 (18 分). 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶正交矩阵，证明：$A_{ij} = \pm a_{ij}\ (i, j = 1,2,\ldots,n)$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

四 (18 分). a, b 为何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = b, \\ -x_1 + x_2 + 4x_4 = 3-b, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + ax_4 = 1 \end{cases}$ 有解？有解时求出解.

五 (21 分). 设 A 为 n 阶矩阵，$A \ne I$ (I 表示单位矩阵)，$(A-I)(A+I)=0$.

1. 证明：$R(A-I)+R(A+I)=n$；

2. 求 A 的一个特征值.

六 (18 分). 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 是正定矩阵，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是任意 n 个非零实数. 证明：$B=(a_{ij}b_ib_j)$ 也是正定矩阵.

七 (18 分). 设 R^3 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 为

$$\mathcal{A}(x,y,z) = (x+2y+z,\ y-z,\ x+z).$$

求 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1=(1,0,1), \alpha_2=(0,1,1), \alpha_3=(1,-1,1)$ 下的矩阵.

八 (21 分). 设 V_1, V_2 是数域 P 上的线性空间。$\forall(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\in V_1\times V_2$，$\forall k\in P$，规定:

$$(\alpha_1,\alpha_2)+(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2)$$
$$k(\alpha_1,\alpha_2)=(k\alpha_1,k\alpha_2)$$

1. 证明：$V_1\times V_2$ 关于以上运算构成数域 P 上的线性空间;

2. 设 $\dim V_1=m$, $\dim V_2=n$ ，求 $\dim(V_1\times V_2)$.