

电子科技大学

2008 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目: 612 高等数学

所有答案必须写在答题纸上, 做在试卷或草稿纸上无效。

一、填空题 (本题满分 24 分, 每小题 4 分)

(1) 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{x \cos x^2} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 $n =$ _____.

(2) 函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) (n \geq 3) =$ ().

(3) $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx =$ _____.

(4) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长为 a , 则 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds =$ _____.

(5) 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$ 的通解为 _____.

(6) 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}$ 当 α 满足 _____ 条件时该级数收敛.

二、单项选择题 (本题满分 24 分, 每小题 4 分)

(1) 设 $\delta > 0$, $f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 内有定义, 若当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq x^2$, 则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的 ().

(A) 间断点; (B) 连续而不可导点;

(C) 可导点, 且 $f'(0) = 0$; (D) 可导点, 且 $f'(0) \neq 0$.

(2) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) =$ ().

(A) $\frac{2}{3}$; (B) $\frac{3}{2}$; (C) $\frac{2}{5}$; (D) $\frac{5}{2}$.

(3) 已知 $a \neq b$, 为使 $\int \frac{dx}{(a+b \cos x)^2} = \frac{A \sin x}{a+b \cos x} + B \int \frac{dx}{a+b \cos x}$, 则 ()

(A) $A = \frac{b}{a^2 - b^2}, B = \frac{a}{a^2 - b^2}$; (B) $A = -\frac{b}{a^2 - b^2}, B = \frac{a}{a^2 - b^2}$

(C) $A = -\frac{b}{a^2 - b^2}, B = -\frac{a}{a^2 - b^2}$; (D) A、B 无解.

(4) 设 D 是 xoy 平面上 $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $\iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 等于 ().

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$; (B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$;

(C) $\iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$; (D) 0.

(5) 设 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的内侧, 则曲面积分 $\oiint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy =$ ().

(A) $-4\pi R^5$; (B) $4\pi R^5$;

(C) $\frac{12}{5}\pi R^5$; (D) $-\frac{12}{5}\pi R^5$.

(6) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ ().

(A) 均发散; (B) 均收敛;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 发散; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛.

三、(本题满分 10 分)

若 $f''(x)$ 存在, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2}$.

四、(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 证明: $\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2$.

五、(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 内二阶可导, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(4) = 2$, 求证: $\exists \xi \in (0, 4)$, 使 $f''(\xi) = -\frac{1}{3}$.

六、(本题满分 10 分)

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 且 $F(0) = 1$, $F(x)f(x) = \cos 2x$, 求 $\int_0^{\pi} |f(x)| dx$.

七、(本题满分 10 分)

设 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 具有二阶连续偏导数且满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$, 求 $z(x, y)$.

八、(本题满分 10 分)

试证曲面 $z = x^2 + y^2 + a (a > 0)$ 上任意点处的切平面与曲面 $z = x^2 + y^2$ 所围的空间区域的体积是一个常数

九、(本题满分 10 分)

设曲面 S 为曲线 $\begin{cases} z=e^y \\ x=0 \end{cases}$ ($1 \leq y \leq 2$) 绕 z 轴旋转一周所成曲面的下侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_S 4zx \, dydz - 2z \, dzdx + (1-z^2) \, dxdy.$$

十、(本题满分 10 分)

初始质量为 M_0 克, 在空气中自由下落的雨点均匀地蒸发着, 设每秒蒸发 m 克, 空气阻力和雨点速度成正比(比例系数为 k), 如果开始雨点速度为零. 试求雨点的运动速度和时间的关系.

十一、(本题满分 11 分)

已知级数 $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$, (1) 确定其收敛区间; (2) 求它的和函数 $S(x)$.

十二、(本题满分 11 分)

设函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续有界, 周期为 1, 且 $\int_0^1 \varphi(x) dx = 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连

续导数, 设 $a_n = \int_0^1 f(x) \varphi(nx) dx$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.