

四川. 大学 2000 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目: 数学

适用专业: 无线电物理

研究方向: 电磁场生物医学工程

一. 选择题 (每小题 3 分, 共 15 分.)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()

(1) 极限不存在

(2) 极限存在但不连续

(3) 连续但不可导

(4) 可导

2. 设 y 是由方程 $\int_0^y e^x dx + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所确定的 x 的函数, 则 $\frac{dy}{dx} = ()$.

(1) $\frac{\cos x}{1 - \sin x}$

(2) $\frac{\cos x}{\sin x - 1}$

(3) $\frac{\cos x}{e^y}$

(4) 0

3. 曲线 $y = \frac{x - \ln x}{1+x}$ ()

(1) 有水平渐近线

(2) 有铅垂渐近线

(3) 有斜渐近线

(4) 无渐近线

4. 二重积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \ln(x^2+y^2) dx dy$ 的值 ()

- ① 大于 0 ② 小于 0 ③ 等于 0 ④ 符号不能确定

5. 设矩阵 A 与 B 满足下列条件中的 (), 则 A 与 B 相似.

- ① $\text{秩}(A) = \text{秩}(B)$ ② $|A| = |B|$
 ③ A 与 B 有相同的特征多项式 ④ n 阶矩阵 A 与 B 有相同的特征值且 n 个特征值互异.

二. 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 设 $y = f(\ln x) e^{f(x)}$, 其中 $f(x)$ 可微, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 当 a 满足 () 时, $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 - 2x_2x_3 + ax_3^2$ 为正定二次型.

三. 计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & x < 0 \\ 5 & x = 0 \\ \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} & x > 0 \end{cases}$ 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2. 求由方程 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 对于 x 的二阶导数.

3. 求不定积分 $\int (\ln \ln x + \frac{1}{\ln x}) dx$,

4. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n 4^n} x^{2n-1}$ 的收敛域.

5. 已知实矩阵 A 的特征值与特征向量, 求伴随矩阵 A^* 的特征值和特征向量.

四. (8分)

已知 $f(0) = -\frac{1}{2}$, 求函数 $f(x)$ 使积分

$$\int_A^B [e^x + f(x)] y dx - f(x) dy$$

与路径无关, 并求当 A 为点 $(0,0)$, B 为点 $(1,1)$ 时, 此曲线积分的值.

五. (6分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量, 求

x 和 y 应满足的条件.

六. (8分)

计算曲面积分 $\iiint_{\Sigma} (y(x-z) dy dz + x^2 dz dx + (y+z^2) dx dy)$

其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 < z < 1$) 的外侧.

七. (6分)

在区间 $(0, \pi)$ 上将 $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ 展开成正弦级数.

八. 证明题 (每小题6分, 共12分.)

1. 证明:
$$e^x - e^{\int_{\ln 2}^x \frac{dx}{1-e^{-x}}} = 1, \quad (x > 0)$$

2. 设 A, B 均为 n 阶正定矩阵, 证明: $A+B$ 也是正定矩阵.