2

四川大学

2002年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

科目代号：432*

适用专业：基础数学、计算数学、应用数学、概率论与数理统计

（本试题共2页）

（答案必须写在试卷上，写在试题上不给分）

一、（本题满分24分，每小题8分）解答下列各题.

1. 证明多项式 $f(x)=x^5-5x+1$ 在有理数域 Q 上不可约.

2. 设 A 为 n 阶方阵且 $A^2+A=2E$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵. 证明: $\mathrm{r}(A-E)+\mathrm{r}(A+2E)=n$, 其中 $\mathrm{r}(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

3. 设 n 维线性空间 V 上的线性变换 T 满足: $\mathrm{T}^2=\mathrm{T}$. 证明 $\mathrm{T}+\mathrm{E}$ 可逆, 其中 E 为恒等变换.

二、（本题满分12分）设

$$A=\begin{pmatrix}-13 & -10\\ 21 & 16\end{pmatrix},$$

求 A^{2002}.

三、(本题满分 12 分) 设 V 是数域 F 上的三维线性空间. 证明: 不存在 V 的线性变换 T 使得 T 在 V 的两组基下的矩阵分别为:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 和 \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

四、(本题满分 12 分) 设 α,β,γ 是三次方程 $x^3+3x-1=0$ 的根, 求 $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ 的值.

五、(本题满分 16 分) 利用正交变换将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

化为标准形, 并写出相应的正交变换和标准形.

六、(本题满分 12 分, 每小题 6 分) 设 A, B 是 n 阶实正交矩阵, t 为矩阵 $A^{-1}B$ 的特征根 -1 的重数. 证明:

1. $\det(AB)=1$ 的充要条件是 t 为偶数.
2. $A+B$ 的秩 $r(A+B)=n-t$.

七、(本题满分 12 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 为欧氏空间 V 的一组线性无关向量, 而 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ 和 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$ 为 V 的两组正交向量组. 假设对每个 $1\le i\le m$, β_i 和 γ_i 均可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_i$ 线性表出. 证明: 存在 m 个实数 $a_1,a_2,\ldots,a_m$ 使得

$$\beta_i=a_i\gamma_i,\quad 1\le i\le m.$$