3

四川大学

2002年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：泛函分析
科目代号：534#
适用专业：基础数学、应用数学

（试题共 2 页）

（答案必须写在试卷上，写在试题上不给分）

一．　详细解释下列概念：（15 分）

1．线性距离空间 X
2．线性赋范空间 X
3．内积空间 X

二．　设 $(X, \|.\|)$ 是线性赋范空间．$r>0$，若球 $B=\{x\in X, \|x\|<r\}$ 是列紧的，证明 X 必是有限维的．（提示：利用 Riesz 引理）（15 分）

三．　设 T 是 Hilbert 空间 H 上有界线性算子，试证明：若对一切 $x\in H$，$\mathrm{Re}(Tx,x)=0$，则 $T+T^{*}=0$．（15 分）

四．　Banach 空间 X．如果 X' 可分，试证明 X 可分．（15 分）

五．　设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $a_n\to 0$，$n\to\infty$，

在 l^1 上定义算子 T 为 $y=Tx$ ：$y=\{\alpha_n\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，$x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$．

试证明 T 是 l^1 上紧算子．（15 分）

六．　完备叙述下列定理（15 分）

1．Banach 空间 X 上线性算子的一致有界性定理。
2．Banach 空间 X 上线性算子的闭图形定理。
3．Banach 空间 X 上的逆算子定理．

七．在 Banach 空间 C[0,1] 上定义算子 A 为

$$Ax(t)=\int_0^1 e^{t-s}x(s)\,ds \qquad x\in C[0,1]$$

试证明 A 是 C[0,1]到 C[0,1]的连续线性算子并求出 A 的范数．（10 分）