十

四川大學

2002年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：计算方法及程序设计

科目代码：535#

适用专业：计算数学

（试题共 3 页）

（答案必须写在试卷上，写在试题上不给分）

1. 设 $f(x) \in C^3[a,b]$，而 $H_2(x)$ 是满足下列插值条件的二次式，即
$H_2(a)=f(a)$，$H_2(b)=f(b)$，$H_2'(b)=f'(b)$.
求 $H_2(x)$ 的表达式，并证明

$$f(x)-H_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-a)(x-b)^2, \quad a<\xi<b.$$

（本题10分）

2. 设 $f(x) \in C^2[a,b]$，试推导如下中矩形公式

$$\int_a^b f(x)dx \doteq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

并证明余项 $R(f)=\int_a^b f(x)dx-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$，
$\xi \in [a,b]$

（本题10分）

3. 用LU分解解方程组

$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 \\ -18 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

（本题10分）

4. 确定求积公式 $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度.

(本题10分)

5. 用最小二乘法解超定方程组

$$\begin{cases} 2x+4y = 11 \\ 3x-5y = 3 \\ x+2y = 6 \\ 2x+y = 7 \end{cases}$$

(本题10分)

6. 在线性方程组 $AX=b$ 中，

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

试判别用 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代解此方程组的敛散性。(本题10分)

7. 设 $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 为n次Lagrange插值基函数，$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为互异节点. 证明

$$\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^k l_j(x) = 0, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

(本题10分)

8. 设 x^* 是 $f(x)=0$ 的 $m\ (m\geq 2)$ 重根。证明牛顿法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

是一阶方法，而改进的牛顿法

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

则是二阶方法。（本题10分）

9. 用梯形法解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y'+y=0 \\ y(0)=1 \end{cases}.$$

试导出其近似解 y_n 的表达式，并证明 $h\to 0$ 时，它收敛于原初值问题的准确解 $y=e^{-x}$.

（本题10分）

10. 试写出求方程 $f(x)=0$ 的弦割法的算法及C语言程序。（本题10分）