四川大学

2003年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：泛函分析

科目代码：441#

适用专业：基础数学、应用数学、运筹学与控制论

（试题共2页）

（答案必须写在答卷纸上，写在试题上不给分）

一.（本题满分15分）设 X,Y 是线性赋范空间，$T:X\to Y$ 是线性映射，若 T 是一对一的满射，则称 X 与 Y 是同构的. 证明：若 X 是有限维线性赋范空间，则 X 的对偶空间 X^* 与 X 同构.

二.（本题满分15分）设 X 是有限维线性赋范空间，试证 X 中的弱收敛等价于按范数收敛.

三.（本题满分20分）设 $C([a,b])$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体，定义

$$\| f \|= max_{t\in[a,b]} \mid f(t) \mid,$$

(i). 试证 $\|\cdot\|$ 是 $C([a,b])$ 上的范数，且 $C([a,b])$ 在此范数下构成一个 Banach 空间。

(ii). 设 $K(t,s)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上的连续函数，试证当 $\alpha<1$ 时，

$$Tf(t)=\int_a^b \frac{K(t,s)}{\mid t-s\mid^{\alpha}} f(s)ds$$

是 $C([a,b])$ 上的有界线性算子。

4

四．（本题满分 15 分）试证 $Tf(t)=tf(t), Sf(t)=\int_0^1 tsf(s)ds$ 均是 $L^2([0,1])$ 上的有界线性算子，但它们不交换，即 $[T,S]=TS-ST\neq 0$.

五．（本题满分 20 分）设 $T:l^2\to l^2$ 由 $y=Tx$ 定义，其中 $x=(\xi_i), y=(\eta_i), \eta_i=\alpha_i\xi_i$

（i）证明 T 是紧算子当且仅当 $lim_{i\to\infty}\alpha_i=0$；

（ii）当 T 是紧算子时，求 T 的谱.

六．（本题满分 15 分）设 X 是 Banach 空间，M 是 X 的子空间，$x\in X$. 试证 $x\in \overline{M}$ 当且仅当对任意 $f\in X^*$, 只要 $f(y)=0, (\forall y\in M)$ 必有 $f(x)=0$.

七．（本题满分 15 分）设 $\{x_n\}$ 是 Banach 空间 X 中的弱收敛序列，试证 $\{x_n\}$ 是 X 中的有界列.

八．（本题满分 20 分）设 X 是赋范线性空间，$\{f_n\}$ 是 X 上的有界线性泛函序列，即 $f_n\in X^*, n=1,2,3,\cdots$, 试证明

（i）f_n 弱收敛于 $f\in X^*$ 蕴涵 f_n弱*-收敛于 $f\in X^*$；

（ii）（若 $X=X^{**}$, 则称 X 是自反空间）如果 X 自反，f_n弱*-收敛蕴涵 f_n 弱收敛。

九．（本题满分 15 分）若 $M=\{x\mid Fx=0\}$, 这里 F 是 Hilbert 空间 H 上的一个有界线性泛函，证明 $M^\perp$ 是一个维数至多为 1 的向量空间。