四川大學

2004年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：　数学（微积分、线性代数）
科目代码：　373#
适用专业：　物理电子学

（试题共 4 页）

（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

一. 选择题（每小题5分，共25分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} \ln\sqrt{x^2+a^2}, & x>1, \\ e^{b(x-1)}-1, & x\le 1, \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，则______.

(A) $a=0$, $b=2$,　　(B) $a=0$, $b=1$

(C) $a=\frac{1}{e}-1$, $b=2$,　　(D) $a=e-1$, $b=1$.

2. 设有直线 L: $\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0. \end{cases}$ 及平面 π: $4x-2y+z-2=0$

则有（　　）

(A) L平行于π　　(B) L在π上

(C) L垂直于π　　(D) L与π斜交.

3. 设A为n阶矩阵，且满足$A^2+A=0$，则下列结论中错误的是（　　）

(A) $A+2I$ 可逆　　(B) $A+I$ 可逆

(C) $A-I$ 可逆　　(D) $A-2I$ 可逆.

4. 设 a 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$ 的敛散性为（　　）.

(A) 绝对收敛　(B) 条件收敛　(C) 与 a 的值有关

(D) 发散

5. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则二重积分 $\int_{-1}^{0}dx\int_{x+1}^{\sqrt{1+x^2}}f(x,y)dy$ 交换次序后为（　　）.

(A) $\int_0^1 dy\int_{-1}^{y+1}f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-1}^{\sqrt{y^2-1}}f(x,y)dx$.

(B) $\int_0^1 dy\int_{-1}^{y-1}f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dy\int_{-1}^{y-1}f(x,y)dx+\int_1^{\sqrt{2}}dy\int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}}f(x,y)dx$.

(D) $\int_0^2 dy\int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}}f(x,y)dx$.

二. 填空题（每小题5分，共25分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}, & x<1,\\ e^{2ax}-e^{ax}+1, & x\geq 1.\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$____.

2. 设有直线 $L_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 $L_2: \frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$，则 L_1 与 L_2 的夹角为____.

3. 若 $f(x)=x^2+x\int_0^1 f(x)dx$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$____.

4. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

相似，则 $x=$___，$y=$___.

5. 曲线 $y=\dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2}$ 有___条渐近线.

三. 计算题（每小题10分，共80分）

1. 设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，
$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\,dt$，当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小量，求 k 的值.

2. 设 $z=f(x^2+y^2,\ xy)$，$y=x+\varphi(x)$，求 $\dfrac{dz}{dx}$，其中 $f(u,v)$ 有连续的一阶偏导数，$\varphi(x)$ 可微.

3. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围的立体.

4. 计算积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} z\,dS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\leq 2x$ 内的部分

5. 求可微函数 $\varphi(x)$ 使关系式
$$\oint_L \varphi(x)(y\,dx-x\,dy)=0$$
成立，其中 L 为与 y 轴不相交的任何闭曲线，并计算 $I=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\varphi(x)(y\,dx-x\,dy)$

6. 求曲面 $z=2x^2+\dfrac{y^2}{2}$ 上平行于平面 $2z+2y-4x+1=0$ 的切平面方程，并写出切点处的法线方程.

四.

7. 设 $\xi=(1,1,-1)^T$ 是 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 之一特征值.

① 求 a, b 的值，并求 ξ 对应的特征值.

② A 能否相似于对角阵.

8. 设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

问 λ 取何值时，方程组①无解 ②有唯一解 ③有无穷多解？并在有解时，求出其全部解.

四、证明题（每小题10分，共20分）

1. 证明：$e^x - e^{\int_{\ln 2}^{x}\frac{dx}{1-e^{-x}}} = 1 \quad (x>0)$

2. 设 A 是 $n\times(n-1)$ 矩阵，证明：方程组 $A\xi=b$ 有解时，增广矩阵的行列式为零。问反过来是否成立？