四川大学

2004年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目： 计算方法及程序设计
科目代码： 455#
适用专业： 计算数学

（试题共 2 页）
（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

1.（10分）在区间$[a,b]$上任取插值节点：$a\le x_0\le x_1<\cdots<x_n\le b$ 作函数$f(x)$的不高于n次的插值多项式$P_n(x)$，假定$f(x)$在$[a,b]$上任意次可微，且$|f^{(k)}(x)|\le M$，$k=0,1,2,\cdots$，$x\in[a,b]$，问：$n\to\infty$时，序列$\{P_n(x)\}$在$[a,b]$上是否收敛于$f(x)$？

2. 求矛盾方程组

（10分）

$$\begin{cases} x_1-x_2=1 \\ -x_1+x_2=2 \\ 2x_1-2x_2=3 \\ -3x_1+x_2=4 \end{cases}$$

的最小二乘解.

3. 证明勒让德多项式 $P_0(x)=1$，$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$ 是$[-1,1]$上带权$\rho(x)\equiv1$的n次正交多项式，且

（20分）
$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\ne n\\ \frac{2}{2n+1}, & m=n\end{cases}.$$

4. 证明：对于$f(x)=0$的多重根x^*，牛顿法仅为线性收敛

（15分）

5. 给定方程组

(20分)
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

讨论 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的敛散性.

6. 对初值问题 $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$, 证明如下龙格-库塔公式

(15分)
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_2+K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n+th, y_n+thK_1) \\ K_3 = f(x_n+(1-t)h, y_n+(1-t)hK_1) \end{cases}$$

对任意参数 t 为二阶公式.

7. 用LU分解解方程组

(15分)
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

8. 已给显式方法 $u_{n+2} = \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_0 u_n = h[\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n]$.

(20分) (1) 取 α_1 为参数, 确定 $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$, 使方法至少为2阶的;

(2) 能否选择 α_1, 使所得方法为三阶的, 且满足根条件?

9. 应用牛顿法于方程 $f(x)=x^n-a=0$, (1) 导出求 $\sqrt[n]{a}$ 的迭代公式, 求 $\lim_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2$; (2) 给出算法及程序(C语言).

(25分)