

四川大學

2004 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目: 高等数学 (微积分、级数)

科目代码: 366#

适用专业: 高等教育学、理论物理、粒子物理与原子核物理、
凝聚态物理、光学、微电子学与固体电子学

(试题共 4 页)

(答案必须写在答题纸上, 写在试题上不给分)

一. 填空题 (在括号内填上正确答案, 每小题 4 分, 共 20 分)

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2}\right)^{-n} = (\quad)$

2. 当 $h \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{f(x_0+3h) - f(x_0-h)}{h}$ 的极限是
(\quad) [注: 设 $f'(x_0)$ 存在]

3. 设 $f(x) = e^{-x}$, 则积分 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = (\quad)$

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = (\quad)$

因此该级数的敛散性是 (\quad)

5. 重积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy = (\quad)$

二. 单项选择题 (将正确的选择的序号写在括号内, 每小题 4 分, 共 20 分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(4x-1)^5} = (\quad)$

其中 $B > 0$, 则常数 α, β 的值为 ()

- (A) $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{5}$ (B) $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{4}$
 (C) $\alpha = 5, \beta = \frac{1}{4^5}$ (D) $\alpha = 5, \beta = 4^5$

2. 幂级数 $1 - \frac{x-1}{3\sqrt{2}} + \frac{(x-1)^2}{3^2\sqrt{3}} - \frac{(x-1)^3}{3^3\sqrt{4}} + \frac{(x-1)^4}{3^4\sqrt{5}} - \dots$

在其收敛区间的两端点处 ()

- (A) 都是收敛的 (B) 都是发散的
 (C) 左端点收敛, 右端点发散
 (D) 左端点发散, 右端点收敛

3. 若可微函数 $f(x+y, x-y) = x^2 - y^2$, 则

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = ()$$

- (A) $2x - 2y$ (B) $x + y$ (C) $x - y$ (D) $2x + 2y$

4. 设曲线 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 则 $\int_L (x + y^3) ds$ 的值为 ()

- (A) 0 (B) a (C) a^2 (D) a^3

5. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$, 则其积分

$$\int_0^2 f(x) dx = ()$$

- (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

三. 计算题与应用题 (共110分)

1. (9分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{当 } x \leq x_0 \\ ax+b & \text{当 } x > x_0 \end{cases}$
在点 x_0 处可导, 应该如何选择常数 a 和 b ?

2. (9分) 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+5)^x - x}{x^2}$

3. 设曲线段 L 是抛物线 $y = 6 - 2x^2$ 在第一象限内的部分, 在 L 上求一点 $M(x_0, y_0)$, 使过该点的切线与两坐标轴和 L 所围成的面积最小. (13分)

4. (14分)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) 2^n \cdot x^{2n}$ 的收敛域.

(2) 设 $f(x)$ 在 $|x| < 1$ 上有定义, 在 $x=0$ 的邻域内

有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, (其中 A 为常数且不为零),

试判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 的敛散性.

5. (9分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} x^{4n+1}$ 的和函数

(其中 $|x| < 1$)

6. (14分) 设 $u = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$, 求 $du \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}}$

(2) 设 $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 确定 z 是

x, y 的可微函数, 且 $F'_z \neq 0$. 求

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

7. (9分) 计算 $\int_L (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$,

其中 m 为常数, L 为由点 $A(a, 0)$ 至原点 $O(0, 0)$ 的上半

圆周 $x^2 + y^2 = ax$, ($a > 0$)

8. (9分) 计算重积分 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} dx dy$, 其中 D 是

由直线 $y=x$, $x=2$ 及上半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 所围成的区域.

9. (9分) 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t) dt = e^{-2x} - 1$

求 $\int_0^1 f(x) dx$

10. (15分)

(1) 已知函数 $y=y(x)$ 在 $\frac{1}{2}$ 至 x 处的增量

$$\Delta y = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \Delta x + \alpha, \text{ 其中当 } \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时 } \alpha \text{ 是}$$

Δx 的高阶无穷小量, 且 $y(0) = \pi$, 求 $y(\frac{1}{2})$

(2) 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, n 为自然数.

将二重积分

$$\int_a^b dy \int_a^y (y-x)^{n-1} \cdot f(x) dx$$

化为一元定积分.