四川大学

2005年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：数学分析、高等代数
科目代码：352
适用专业：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论、不确定性处理的数学、信息安全

（试题共 2 页）
（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

请注意：本试题分为两部分："数学分析"部分（第一题至第五题）和"高等代数"部分（第六题至第十二题）

"数学分析"部分. 本部分共5道题

一、(本题满分15分)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}$.

二、(本题满分15分)已知数列 $\{x_n\}$ 满足：对一切 n 都有：$(1+\frac{1}{n})^{n+x_n}=e$ 成立.

求：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

三、(本题满分15分)计算二重积分：$\iint\limits_D e^{-(x+y)^2}dxdy$，其中，$D$ 由 $x+y=1$、$y=x$、$x=0$ 所围成.

四、(本题满分15分)若 $-\infty<a<b<c<+\infty$，$f(x)$ 在 $[a,c]$ 上连续，且 $f(x)$ 在 (a,c) 上二阶可导. 求证：存在 $\xi\in(a,c)$ 使得：

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(\xi)$$ 成立.

五、(本题满分15分)设对所有 $x\in(0,+\infty)$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 都收敛，且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!a_n$ 收敛.

求证：$\int_0^{+\infty}(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^ne^{-x})dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!a_n$

"高等代数"部分. 本部分共7道题.

六、(本题满分15分)用两种方法证明如下的结论：设 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 和 $B=(a_{ij})_{m\times p}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵，则：$rank(A)+rank(B)\le rank(AB)+m$.

七、(本题满分10分)设 $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵的全体. 对任意非零矩阵 $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$，定义集合 $S_A=\{XAY\mid 任意X,Y\in\mathbb{M}_n(\mathbb{F})\}$. 证明：$S_A=\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$.

八、(本题满分10分)问：矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 能否分解为初等矩阵的乘积?说明理由. 如果能分解，把它分解为初等矩阵的乘积.

九、(本题满分10分)设 $A=\begin{pmatrix}2&0&2\\-1&3&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$.

(1). 证明：在任意的数域 $\mathbb{F}$ 上，A 都不可能相似于一个对角阵.

(2). 设 $f(x)=x^4-10x^3+36x^2-56x+32$. 计算 $f(A)$.

十、(本题满分10分)设 $\underline{T}$ 是实向量空间 $\mathbb{R}^5$ 上的一个线性变换. 证明：对任意整数 k $(0\le k\le 5)$，$\underline{T}$ 一定有 k 维不变子空间.

十一、(本题满分10分)设 $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$.

(1). 证明：A 是一个正定矩阵.

(2). 求出所有的实系数多项式 $f(x)$，使得 $f(A)$ 也是正定的.

十二、(本题满分10分)是否存在非零的反对称实矩阵 A，使得 A 相似于一个实对角矩阵?证明你的结论.