四川大学

10

2006年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：数学分析、高等代数
科目代码：352
适用专业：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论、不确定性处理的数学、信息安全

（试题共2 页）
（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

请注意：本试题分为两部分："数学分析"部分（第一题至第五题）和"高等代数"部分（第六题至第十题）

"数学分析"部分. 本部分共5道题

一、（本题满分10分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n - \dfrac{1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$.

二、（本题满分15分）设函数 $f(x)$ 在[0，1]上二阶可导，且满足 $|f''(x)|\le 1$，$f(x)$ 在区间（0，1）内取到最大值 $\frac{1}{4}$. 证明：$|f(0)|+|f(1)|\le 1$.

三、（本题满分15分）设函数 $f(x)$ 在[0，1]上连续可导，且 $f(0)=f(1)=0$. 证明：

$$\int_0^1 |f(x)f'(x)|\,dx \le \frac{1}{4}\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx.$$

四、（本题满分20分）证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^x}$ 在（0，+∞）上不一致收敛，但在（0，+∞）上有连续的导函数.

五、（本题满分15分）计算曲面积分

$$\iint_S \frac{x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

其中 S 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (z\ge 0)$ 的上侧.

"高等代数"部分. 本部分共 5 道题.

六、(本题满分 10 分) 设 $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$. 对任意正整数 n, 求矩阵 $(E+uv^T)^n$, 其中 E 是三阶单位阵, v^T 表示 v 的转置.

七、(本题满分 10 分)证明: 数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵 A 是一个数量矩阵当且仅当 A 与所有 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶初等矩阵可交换, (数量矩阵是形如 λE 的矩阵, 其中 $\lambda\in\mathbb{F}$, E 是单位阵).

八、(本题满分 10 分)设线性方程组 $AX=\beta$ 有解, 其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$. 对于某个 k, ($1\le k\le n$), 证明: 该方程组的任意解的第 k 个分量都为 0 的充分必要条件是, 划去增广矩阵 (A,β) 的第 k 列后秩要减少 1.

九、(本题满分 10 分)设 p 是素数, $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$ 是一个多项式.

1. 证明: 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上, $f(x)$ 不可约.
2. 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个 n 维线性空间, $\underline{A}$ 是 V 上的一个线性变换, 满足 $f(\underline{A})=\underline{0}$. 证明: 对任意 $1\le k\le n$, V 有 $\underline{A}$ 的 k 维不变子空间.

十、(本题满分 35 分)已知某个实对称矩阵 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^5+3\lambda^4-6\lambda^3-10\lambda^2+21\lambda-9.$$

1. 求 A 的行列式和极小多项式.
2. 设 $V_A=\{g(A)\mid g(x)\in\mathbb{R}[x]\}$. 证明: V_A 是线性空间, 并求 $\dim V_A$.
3. t 为什么实数时, $tE+A$ 是正定矩阵? 其中 E 是单位阵.
4. 给出一个具体的、不是对角阵的实对称矩阵 A, 使得它的特征多项式为 $f(\lambda)$.