

2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目: 高等数学

科目代码: 312#

适用专业: 原子与分子物理、凝聚态物理、光学、高压科学与技术

环境科学

(试题共 2 页)
(答案必须写在答题纸上, 写在试题上不给分)

一、解下列各题 (80 分, 每小题 8 分):

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{2x+1}$.

2. $y = \arctan e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}$, 求导数 $\frac{dy}{dx}$.

3. $x^2 - xy + y^2 = 1$, 求导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

4. 设 $u = \frac{e^{\alpha x}(y-z)}{a^2 + 1}$, 而 $y = a \sin x$, $z = \cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$.

5. $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$, 求 $\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

6. 求不定积分 $\int \arctan \sqrt{x} dx$.

7. 求定积分 $\int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx$.

8. 求广义积分 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ (n 为自然数).

9. 判断积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$ 的敛散性.

10. 求重积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

二、(12 分) 设平面曲线 C 是由圆周 $x^2 + y^2 = R^2$, 直线 $y = x$ 及 x 轴在第一象限所围成的整个边界, 线密度 $\rho = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求曲线的质量.三、(12 分) 在半径为 a 的半球内, 求体积最大的内接长方体的体积.

四、(10 分) 求微分方程 $xy' - y = \frac{x}{\ln x}$ 的通解.

五、(12 分) 已知 $f(0) = 0$,

$$f'(x) = 1 + \int_0^x [6 \sin^2 t - f(t)] dt, \text{ 求函数 } f(x).$$

六、(12 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} x^{n-1}$ 的收敛域, 并求其和函数.

七、(12 分) 展开函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

为傅里叶级数.