四川大學

27

2007年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

科目代码：652

适用专业：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论、不确定性处理的数学、信息安全

（试题共 2 页）

（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

本试题满分 150 分，共 6 道大题

一、（每小题 7 分，共 21 分）计算下列极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty} n((1+\frac{1}{n})^n - e)$ （2） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x)$

（3） $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

二、（每小题 10 分，共 60 分）计算下列积分。

（1）设 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<0\\ 1+x, & x\geq 0\end{cases}$，求 $\int_{-2}^{1} f(f(x))$

（2） $\iint\limits_D \sqrt{x}+\sqrt{y}dxdy$，其中 D 是由抛物线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$， $x=0$，

及 $y=0$ 所围区域。

（3） $\iiint\limits_\Omega x^2+y^2dxdydz$，其中 Ω 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与上半球面

$x^2+y^2+z^2=3a^2$ 所围区域。

（4） $\iint\limits_S (xy+yz+zx)dS$，其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面

$x^2+y^2=2ax$ 所截部分。

（5） $\int_L (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1-2y\sin x + 3x^2y^2)dy$，其中 L 是 $2x = \pi y^2$ 从原点 $O(0,0)$ 到点 $A(\frac{\pi}{2},1)$ 的一段曲线。

（6） $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的下侧。

三、（本题 15 分）设 $f(x,y)$ 为 R^2 上的可微函数，且有

$$\lim_{r\to+\infty}(xf_x' + yf_y') = a > 0 \qquad (r=\sqrt{x^2+y^2})。$$

证明：$f(x,y)$ 在 R^2 上必有最小值。

四、（本题 14 分）设是 $u=u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数。证明存在常数使得在变换

$$s = x + ay,\quad t = x + by$$

下，可将微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} = 0$。

五、（本题 20 分）设 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 上可导且 $f(0)=0$，$|f'(x)| \le \frac{1}{2}|f(x)|$。证明：在$[1，0]$上，$f(x)\equiv 0$。

六、（本题 20 分） 设 $f(x)$ 在 R^2 上具有二阶连续导数且 $f(0)=f(1)=0$。对于任意 $x\in(0,1)$，$f(x)>0$。证明：

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx > 4。$$