西 南 师 范 大 学

二〇〇〇 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：基础数学　　研究方向：各方向

考试科目：高等代数(含解几)　编　号：434

一.(10分) 证明：若 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$，并说明其几何意义。

二.(10分) 给定方程 $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}=1\ (a>b>c>0)$，问当 k 取异于 a^2,b^2,c^2 的各种实数时，方程代表什么曲面？

三.(10分) 设 $a_{ij}\in Z$ (整数集)，$i,j=1,2,\cdots,n$，$k\in Z$，$k\geq 2$。

证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11}-\frac{1}{k} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\frac{1}{k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\frac{1}{k} \end{vmatrix}\neq 0$$

$=[(a_{ij})]+(-\frac{1}{k})E$　$=[(a_{ij})]-\frac{1}{k}E$

四.(10分) 设 $f(x)\in Z[x]$，$f(x)$ 被 $x-1$，$x-2$，$x-3$ 除后余式分别为 4，8，16，求 $f(x)$ 被 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 除后的余式。

五.(20分) 设 V 是数域 F 上 n 维线性空间，f 是 V 到 F 的线性映射，即对 $\forall\alpha,\beta\in V$，$k\in F$，有 $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$，$f(k\alpha)=kf(\alpha)$。令 $V^*=\{f\mid f$ 是 V 到 F 的线性映射$\}$。V^* 中加法和数乘按通常线性映射的加法和数乘定义。

证明：1) V^* 为 F 上线性空间。

2) $V^*\cong V$。

六(20分). 设 A，C 为 n 阶正定矩阵，若矩阵方程 $AX+XA=C$ 有唯一解 B，证明 B 是正定阵。

七.(10分) 设 f，g 是 n 维线性空间 V 的两个线性变换，

证明：$\dim(\ker fg)\leq\dim(\ker f)+\dim(\ker g)$。

八.(10分) 设 A 为 3×2 矩阵，B 为 2×3 矩阵，已知

$$AB=\begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

证明：$BA=\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}=9E_2$

其中 E_2 表示 2 阶单位矩阵。

注：报考数学教学论研究方向的考生不做第七、八题，第一、二题各加10分。

第一页