西 南 师 范 大 学

二〇〇一年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：基础数学　　研究方向：所有方向及课程与教学论学科数学教育方向

专试科目：数学分析　　编　　号：327

注意：数学教育方向至少做一至四及八至十题，其它方向做一至七题

一、(每小题 4 分，共 12 分) 叙述下述概念或定理.

1. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上不一致连续；

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$;

3. 有限覆盖定理

二、(每小题 5 分，共 10 分) 设 f 为 R 上的实值函数， A 和 B 是 R 的子集，试问下列等式是否成立，为什么？

1. $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$;

2. $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

三、(每小题 6 分，共 24 分) 计算下列各题.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$;

3. $\iint_D xy\,dx\,dy$, 其中 D 为由 $y=x-4$ 和 $y^2=2x$ 所围成的区域.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

四、(每小题 8 分，共 24 分) 证明下列各题

1. 证明函数 $f(x)=x^3e^{-x^2}$ 有界；f(x)在$(-\infty,+\infty)$上连续. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ∴一致.

2. 设 a,b,c 是实数且 $a^2<3b$, 则方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 仅有一个实数根；

3. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内二阶可导，连接点 $(a,f(a))$ 和点 $(b,f(b))$ 的直线段交曲线 $y=f(x)$ 于 $(c,f(c))$(这里 $a<c<b$). 试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi)=0$.

$\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

∴存在一点 $\xi_1\in(c,b)$, $f'(\xi_1)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$ ∴存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ $f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_1)-f'(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}=0$.

$\xi_2\in(a,c)$ $f'(\xi_2)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

五、(10 分) 设数列 $\{na_n\}$ 和级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

六、(10 分) 设 $f(x)$ 在闭区间 [a,b] 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0$, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

七、(10 分) 设 $f(x)$ 在闭区间 [a,b] 上有二阶连续导数，$f(a) = f(b) = 0$, 且 $|f''(x)| \le M$. 试证

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{M(b-a)^3}{12}$$

八、(10 分) 求抛物线 $x^2 = 2y$ 与直线 $y - x = 4$ 所围成的平面图形的面积.

$e^x+x-1 > x + (1+x)\ln(1+x)$ $f(x) = e^x + x - 1 - x - (1+x)\ln(x+1)$

九、(10 分) 设 $x > 0$. 试证： $e^x + x - 1 > \sin x + (1+x)\ln(1+x)$.

$f'(x) = e^x + 1 - 1 - 1 = e^x - 1$

十、(10 分) 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt \ (x > 0)$. 求 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$f(0) = 1 - 1 - 0 = 0$

$\therefore f(x) > 0$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t}dt \xlongequal{t=\frac{1}{u}} \int_1^{x} \frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u}} \cdot \frac{-1}{u^2}du$$

$$= \int_1^{x} \frac{\ln u}{1+u} \cdot \frac{1}{u}du$$