西 南 师 范 大 学

二〇〇二年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：基础数学、应用数学和概率统计　　研究方向：所有方向及课程与教学论专业数学教育学方向

考试科目：数学分析　　编　号：327

注意：数学教育学方向及单考考生做一至五及九至十一题，其它方向做一至八题. 填空题的答案按编号顺序写在试卷上。

一、填空题(每小题 4 分，共 32 分).

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\cdots+\frac{1}{9n^2-3n-2}\right)=$ $\underline{\quad\frac{1}{3}\quad}$.

2. 设函数 $f(x)$ 具有连续导数，而 $F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)+2\ln(1+x)}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则 $f'(0)=$ ________.

3. 设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$ ________.

4. $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx=$ ________.

5. 设 L 为取顺时针方向的圆周 $x^2+y^2=9$, 则曲线积分 $\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=$ ________.

6. 设 $f(x)=3x^2+2\int_0^1 f(x)dx$, 则 $\int_1^2 f(x)dx=$ ________.

7. 设 $z=e^{\sin xy}$, 则 $dz=$ ________.

8. $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=$ ________.

二、(10 分) 若函数 $f(x)$ 对一切正实数 x,y 恒有 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

当$y\neq0$时 $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$.　　$f(1)=2f(1)$ $\therefore f(1)=0$.

$\forall x_0\in(0,+\infty)$ $|f(x)-f(x_0)|=\left|f(\frac{x}{x_0})\right|\to|f(1)|=0$

$\therefore f(x)$在x_0处连续

$f(x)=f(0)+f'(\xi)x \geq f(0)+kx$. 当x充分大时 $f(x)>0$ 又∵ $f\in C[0,+\infty)$ $f(0)<0$.
∴存在 x_0 使 $f(x_0)>0$. ∴有 ξ 使 $f(\xi)=0$.

三、(10 分) 设在 $[0,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $f'(x)\geq k>0, f(0)<0$. 证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

四、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减，证明：当 $0<\lambda<1$ 时，$\int_0^\lambda f(x)dx \geq \lambda\int_0^1 f(x)dx$.

$\frac{1}{1-\lambda}\int_\lambda^1 f(x)dx \leq f(\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(x)dx$ ∴ $\lambda\int_\lambda^1 f(x)dx \leq (1-\lambda)\int_0^\lambda f(x)dx$
∴ $\lambda\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^\lambda f$
$\lambda\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^\lambda$

五、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二次可导，且在该区间上满足 $|f(x)|\leq 1$ 及 $|f''(x)|\leq 1$. 证明：对区间 $[0,2]$ 上的任何 x, 均有 $|f'(x)|\leq 2$.

六、(10 分) 设 $x_0>0, x_n=\dfrac{2(1-x_{n-1})}{2+x_{n-1}}(n=1,2,\cdots)$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

七、(10 分) 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$.

(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值.

(2) 试证：对任意的常数 $\lambda>0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

八、(8 分) 设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数). 求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

九、(10 分) 设 $0<x<1$, 证明：$\dfrac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$.

十、(10 分) 设 $z=u^2-v^3, u=e^{2x}\sin y, v=x^2+y^2$. 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

十一、(8 分) 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散. 试问：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(a_n+1)^n}$ 是否收敛？并说明理由.