西 南 师 范 大 学

2004 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：基础数学、应用数学、概率论与数理统计 研究方向：基础数学各方向、应用数学各方向、概率论与数理统计的相关各方向

试题名称：高等代数 试题编号：429

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号,否则答题无效。）

注意：报考数学教育研究方向的考生不做第 9 题，报考其余方向的考生不做第 8 题. 考试时间为 3 小时，满分为 150 分.

1. (20 分) 计算 n 阶行列式的值：$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

2. (20 分) 设整系数线性方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$, $i=1, 2, \cdots, n$ 对任何整数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 均有唯一整数解，证明其系数行列式的值必为 1 或-1.

3. (20 分) 把二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准形，写出所做的可逆线性替换，并判别其是否正定.

4. (20 分) 设 $f(x)$ 为数域 F 上多项式，且 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, $(f_1(x), f_2(x))=1$, 又设 V 是数域 F 上 n 维线性空间，T 为 V 的一个线性变换，$K=\mathrm{Ker}(f(T))$, $W_1=\mathrm{Ker}(f_1(T))$, $W_2=\mathrm{Ker}(f_2(T))$, 求证：$K=W_1\oplus W_2$.

5. (20 分) 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，σ是 V 的线性变换，i 是小于 n 的正整数，证明：存在维数为 i 的σ的不变子空间.

6. (20 分) 设 F 为数域，$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in F\right\}$ 为 F 上二阶方阵构成的线性空间，$A\in V$, $T_A(B)=AB-BA$ 为 V 的线性变换. 证明：

(1) 若 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 T_A 的特征值全为零；

(2) 若 A 的特征值全为零，则 T_A 的特征值全为零.

7. (15 分) 设 A, B 为实数域 R 上 $s\times n$ 与 $s\times m$ 矩阵，A' 为 A 的转置. 证明：

(1) 秩$(A'A)$ = 秩(A);

(2) 存在 R 上 $n\times m$ 矩阵 C，使 $A'AC=A'B$.

8. (15 分) 设 F 为数域，$f(x)\in F[x]$，若对 $\forall a,b\in F$ 均有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，则 $f(x)=kx$，其中 $k\in F$.

9. (15 分) 设 F 为数域，$f(x)\in F[x]$，$f(x)$ 满足条件 $xf(x-1)=(x-26)f(x)$，证明：$f(x)=0$ 或 $f(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-25)$，其中 $a\in F$.