西 南 师 范 大 学

年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：基础数学 概率论与数理统计 应用数学　　研究方向：各方向

试题名称：数学分析　　试题编号：322

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效。）

注意：数学教育方向考生做一、二、三、四、五、七题；其余方向考生做一、二、三、四、五、六题

一、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$F(x)=\lim\limits_{a\to 0}\int_0^1 f(x+at)\,dt$，求 $F'(x)$。

3. 计算 $\displaystyle\int\frac{dx}{x+x^{n+1}}$

4. 计算 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$　其中 $f(x)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$

5. 设 D 为单连通开域，$(0,0)\in D$ 且 D 的边界曲线 L 为光滑曲线，并取正方向。

计算 $\displaystyle\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$

二、（20 分）设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

三、（15 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$$

四、（25 分）设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，且 $f(x)$ 在 I 上有且仅有一个极值点 x_0，又设 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点。证明 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的最大值。

五、（25 分）设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，且 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，则

（1）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 发散；　　（2）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{1+\sigma}}$ 收敛（$\sigma>0$）

六、（15 分）设 $a_n(x)=\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^n x$

（1）证明对任意给定的正整数 n，方程 $a_n(x)=1$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 内有且仅有一个是根；

（2）设 $x_n\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 是 $a_n(x)=1$ 的根，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

七、（15 分）设 $p>1$，$q>1$，且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，证明：对任意 $x>0$，有

$$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\ge x$$