西南大学

2006年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：基础数学、应用数学、概率论与数理统计　研究方向：以上专业各研究方向

试题名称：高等代数　　试题编号：460

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号,否则答题无效。）

注意：报考数学教育方向的考生完成 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 题，报考其余方向的考生完成 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 题。考试时间为 3 小时，满分为 150 分。所有题目的解答均写在答题纸上，做在题单上无效。

1.（每小题 6 分，共 30 分）填空：

(1)设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，C 为 $n\times m$ 矩阵，且 $|A|=a, |B|=b, |C|=c, D=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}$，

则 $|D|=$ ________。

（2）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & a & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零方阵，且 $AB=0$，则 $a=$ ________。

（3）已知 4 维向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1)$，$\alpha_2=(2,0,t,0)$，$\alpha_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2，则 t = ______。

（4）设 n 阶方阵 A 的特征值为 2，4，…，$2n$，则行列式 $|3E-A|=$ ________，其中 E 为 n 阶单位阵。

（5）若 3 元实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是________。

2.（**20 分**）设在 $Q[x]$ 中有 $f(x)=6x^4-x^3-52x^2+11x+18$，$g(x)=6x^3-19x^2+3x+7$，求 $(f(x),g(x))$ 并把它表示成 $f(x)$，$g(x)$ 的一个组合。

3. （20 分）设 a_{ij} 为整数，$i,j=1,2,\cdots,n$，证明

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11}-\frac{1}{3} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\frac{1}{3} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\frac{1}{3} \end{vmatrix}\neq 0。$$

4. （15 分）求一个齐次线性方程组，使它的解空间由下列四个向量生成：

$\alpha_1=(-1,-1,1,2,0)$，$\alpha_2=(1,-1,1,12,8)$，$\alpha_3=(1,0,0,5,4)$，$\alpha_4=(-1,-2,2,9,4)$。

5. （15 分）给定实数域 R 上的二维线性空间 V 的线性变换 A，A 在 V 的一组基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$，求 A 的不变子空间。

6. （15 分）设 A 为 $n\times r$ 矩阵，B 为 $r\times s$ 矩阵，秩（B）$=r$，证明：

（1） 如果 $AB=0$，则 $A=0$；

（2） 如果 $AB=B$，则 $A=E$。

7. （25 分）设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，E 为 n 阶单位阵，已知矩阵 $B=\lambda E+A'A$，试证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 B 为正定阵，其中 A' 为 A 的转置。

8. （10 分）设 V_1，V_2 为 n 维欧氏空间 V 的子空间，且 $\dim V_1<\dim V_2$，证明：V_2 中必有非零向量同 V_1 正交。

9. （25 分）设 A 为 n 阶实矩阵，证明：A 为半正定矩阵的充分必要条件是对任意的 $n\times m$ 实矩阵 B，有 $B'AB$ 为半正定矩阵，其中 B' 为 B 的转置矩阵。

10. （10 分）设 $\sum_{i=0}^{n-1}x^iP_i(x^{in})=P(x^n)$，且 $(x-1)\mid P(x)$，其中 $P_i,0\le i\le n-1,P$ 均为实系数多项式。证明：（1） $P_i(x)=0,1\le i\le n-1$；

（2） $P(x)=0$；

（3） $P_0(1)=0$。