绝密★启用前

# 2008年全国硕士研究生入学统一考试

# 数　学（三）

**（科目代码：303）**

## 考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须写在答题纸指定位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

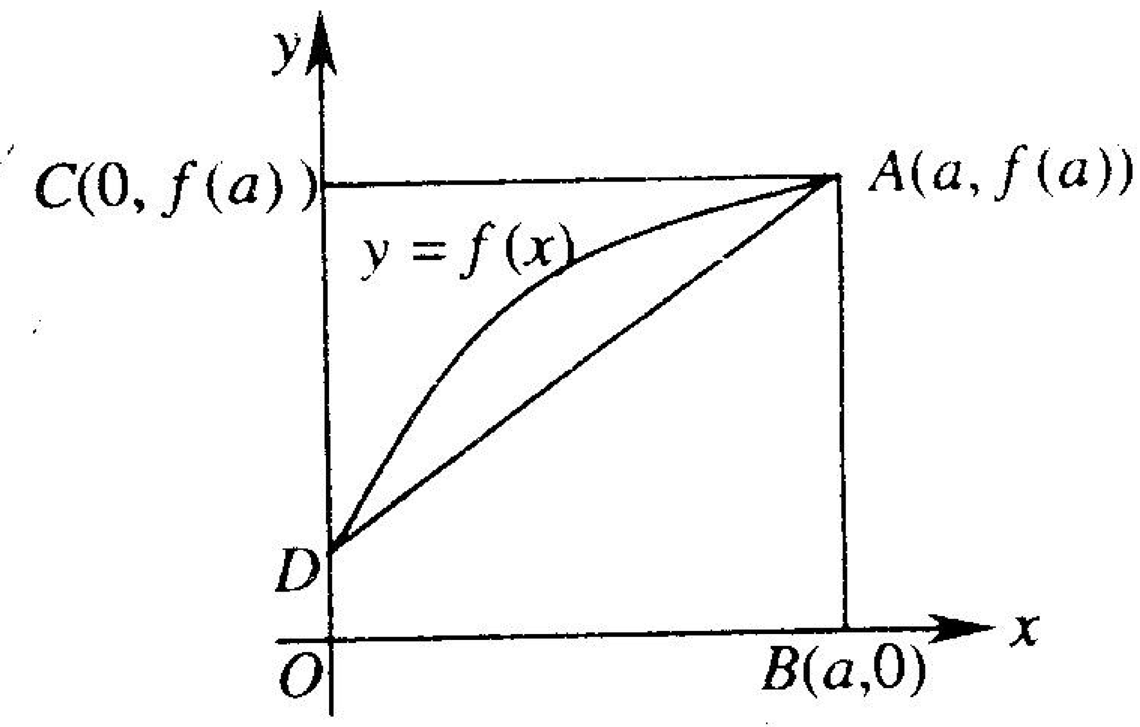
一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的

(A) 跳跃间断点.　　(B) 可去间断点.

(C) 无穷间断点.　　(D) 振荡间断点.

(2) 如图，曲线段的方程为 $y=f(x)$，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于




(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.

(C) 曲边三角形 $ACD$ 的面积.

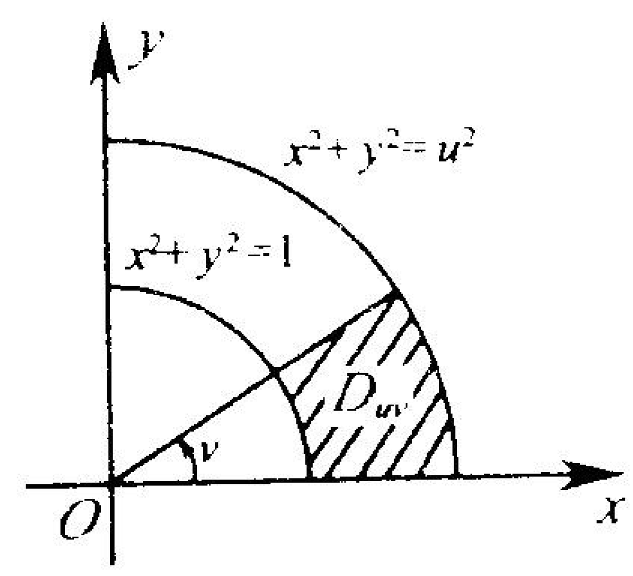
(D) 三角形 $ACD$ 的面积.

(3) 已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则

(A) $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 都存在.　　(B) $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在.

(C) $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 不存在.　　(D) $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 都不存在.

(4) 设函数 $f$ 连续. 若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 $D_{uv}$ 为图中阴影部分，则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$




(A) $vf(u^2)$.　　(B) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$.

(C) $vf(u)$.　　(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.　　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

（6）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为

（A）$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.　（B）$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.　（C）$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.　（D）$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

（7）设随机变量 $X,Y$ 独立同分布，且 $X$ 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

（A）$F^2(x)$.　　（B）$F(x)F(y)$.

（C）$1-[1-F(x)]^2$.　　（D）$[1-F(x)][1-F(y)]$.

（8）设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则

（A）$P\{Y=-2X-1\}=1$.　　（B）$P\{Y=2X-1\}=1$.

（C）$P\{Y=-2X+1\}=1$.　　（D）$P\{Y=2X+1\}=1$.

**二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.**

（9）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$ ___1___.

（10）设 $f(x+\dfrac{1}{x})=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$，则 $\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x=$ ___$\frac{\ln 3}{2}$___.

（11）设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$，则 $\iint\limits_D(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ___$\frac{\pi}{4}+1$___.

（12）微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ ___$-x+2$___.

（13）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，2，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则 $|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$ ___3___.

（14）设随机变量 $X$ 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=EX^2\}=$ ___$e^{-1}$___.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 9 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

（16）（本题满分 10 分）

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 $\varphi$ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$.

（Ⅰ）求 $\mathrm{d}z$;

（Ⅱ）记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

（17）（本题满分 11 分）

计算 $\iint\limits_{D}\max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

（18）（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数.

（Ⅰ）证明对任意的实数 $t$，有 $\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$;

（Ⅱ）证明 $G(x)=\int_0^x[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数.

（19）（本题满分 10 分）

设银行存款的年利率为 $r=0.05$，并依年复利计算. 某基金会希望通过存款 $A$ 万元实现第一年提取 19 万元，第二年提取 28 万元，…，第 $n$ 年提取$(10+9n)$万元，并能按此规律一直提取下去，问 $A$ 至少应为多少万元?

$r=0.05$

設 $19=A(1+0.05)^{t}$

（20）（本题满分 12 分）

设 $n$ 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；　　$(2a)^n+1^n+(a^2)^n.$

（Ⅱ）当 $a$ 为何值时，该方程组有唯一解，并求 $x_1$；

（Ⅲ）当 $a$ 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.　　$a^n.$

（21）（本题满分 10 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值$-1$，1 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

（Ⅰ）证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，$X$ 的概率分布为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}\ (i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

（Ⅰ）求 $P\{Z\leqslant \dfrac{1}{2}|X=0\}$；

（Ⅱ）求 $Z$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

（23）（本题满分 11 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本.记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

（Ⅰ）证明 $T$ 是 $\mu^2$ 的无偏估计量；

（Ⅱ）当 $\mu=0,\ \sigma=1$ 时，求 $DT$.