

# 西南大学

2009 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：理论物理、凝聚态、光学 研究方向：各方向

试题名称：高等数学

试题编号：613

(答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效)

一、填空题 (本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{\sin x}} =$  \_\_\_\_\_.

2. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} x^{2n+1}$  的收敛半径为 \_\_\_\_\_.

3. 设  $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ , 则其以 2 为周期的傅里叶级数在  $x = 1$  处收敛于 \_\_\_\_\_.

4. 设  $C$  是  $x^2 + y^2 = 1$  的正向一周, 则  $\oint_C e^{y^2} dy$  等于 \_\_\_\_\_.

5. 设  $z = y^x$ , ( $y > 0$ ), 则  $dz =$  \_\_\_\_\_.

6. 已知  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 且  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ , 求  $|(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})| =$  \_\_\_\_\_.

7. 设  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 且  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ , 则  $A^{-1} =$  \_\_\_\_\_.



8. 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$  的秩为\_\_\_\_\_.

9. 行列式  $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ g & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  的值为\_\_\_\_\_.

10. 已知三阶矩阵  $A$  的特征值为  $1, 2, -1$ , 则行列式  $|3A - E|$  的值为\_\_\_\_\_.

## 二、选择题 (本题共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分)

1. 若函数  $f(x, y)$  区域  $D$  内具有二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

A. 则必有  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

B. 则  $f(x, y)$  在  $D$  内必连续;

C. 则  $f(x, y)$  在  $D$  内必可微

D.  $A, B, C$  三个结论都不对. [ ]

2. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

A.  $\infty$

B. 2

C. 1

D. 0

[ ]

3. 设积分区域是由曲线  $x = \sqrt{4 - y^2}$  和  $x = 0$  所围成的区域, 则  $\iint_D dx dy =$

A.  $2\pi$

B.  $4\pi$

C.  $\pi$

D.  $8\pi$

[ ]

4. 设有直线  $L: \begin{cases} x + 3y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - y - 10z + 3 = 0 \end{cases}$  及平面  $\pi: 4x - 2y + z - 2 = 0$ , 则直线  $L$

A. 平行于  $\pi$

B. 垂直于  $\pi$

C. 在  $\pi$  上

D. 与  $\pi$  斜交

[ ]



5. 方程  $ydx + (y + 2x)dy = 0$

A. 可化为齐次方程                      B. 可化为线性方程

C. A、B 都可以                      D. A、B 都不可以                      [   ]

6. 当  $x \rightarrow 1$  时,  $\alpha(x) = 1 - x$ ,  $\beta(x) = 2(1 - \sqrt{x})$  均为无穷小量, 则

A.  $\beta(x)$  是  $\alpha(x)$  的高阶无穷小量      B.  $\beta(x)$  是  $\alpha(x)$  的低阶无穷小量

C.  $\beta(x)$  和  $\alpha(x)$  是同阶无穷小量      D.  $\beta(x)$  和  $\alpha(x)$  是等阶无穷小量                      [   ]

7.  $n$  元齐次线性方程组  $AX = 0$  有非零解的充要条件是

A.  $|A| = 0$                       B.  $\text{秩}(A) - n < 0$

C.  $\text{秩}(A) - n = 0$                       D. 方程的个数  $> n$                       [   ]

8. 矩阵  $A$  与矩阵  $B$  相似, 则下列论断错误的是

A.  $A$  与  $B$  有相同的特征多项式      B.  $A$  与  $B$  有相同的特征值

C.  $A$  与  $B$  有相同的特征向量                      D.  $A$  与  $B$  的秩相同                      [   ]

9. 设  $A$  为 4 阶矩阵,  $|A| = a \neq 0$ , 则其伴随矩阵  $A^*$  的行列式  $|A^*| =$

A. 1                      B.  $a$                       C.  $a^2$                       D.  $a^3$                       [   ]

10. 若向量组  $\alpha, \beta, \gamma$  线性无关, 向量组  $\alpha, \beta, \delta$  线性相关, 则

A.  $\alpha$  必可由  $\alpha, \gamma, \delta$  线性表示      B.  $\beta$  必不可由  $\alpha, \gamma, \delta$  线性表示

C.  $\delta$  必可由  $\alpha, \beta, \gamma$  线性表示      D.  $\delta$  必不可由  $\alpha, \beta, \gamma$  线性表示                      [   ]

三、(本题共 4 小题, 每小题 8 分, 满分 32 分)

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin^2 t dt}{x - \frac{\pi}{2}}$ .

2. 设  $z = u^2 - v^2$ ,  $u = xy$ ,  $v = x - y$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .



3. 计算二重积分  $\iint_D (x+y) dx dy$ , 其中  $D$  是由曲线  $y=2$ ,  $y=x$  及  $y=2x$  所围成的区域.

4. 把函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$  展成  $x$  的幂函数.

四、(本题满分 10 分) 计算曲线积分  $\int_C (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$ ,

其中  $C$  是从点  $(a, 0)$  到点  $(0, 0)$  的上半圆周  $y = \sqrt{ax - x^2}$ ,  $m$  为常数.

五、(本题满分 10 分) 求方程  $y'' - 2y' - 3y = e^{3x} + \cos x$  的通解.

六、(本题满分 10 分) 将函数  $f(x) = x^2$  ( $-\pi < x < \pi$ ) 展为傅里叶级数, 并

求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$  的和.

七、(本题满分 8 分) 设  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , 证明不等式  $3x < \operatorname{tg} x + 2 \sin x$ .

八、(本题共 2 小题, 每小题 10 分, 满分 20 分)

1. 已知  $AX = A + 2X$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ , 求矩阵  $X$ .

2. 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_1$ ,

(1) 写出  $f$  的矩阵  $A$ ;

(2) 求出  $A$  的特征值和线性无关的特征向量;

(3)  $A$  能否对角化? 若能, 写出  $A$  的相似对角矩阵  $B$  和矩阵  $P$ , 使  $B = P^{-1}AP$