# 重庆大学2004年硕士研究生入学考试试题

科目代码 ： 331

科目名称：高等数学(含线性代数)

**请考生注意：**

**答题一律（包括填空题和选择题）答在答题纸或答题册上，答在试题上按零分计。**

一．（本题30分;其中,每小题10分)已知三个关于自变量$x$的函数：$y=f(x)$，$z=g(x)$，

$t=h(x)$，其“函数关系”由如下“隐函数方程组”确定出：

$$\begin{cases} t^3e^{-\frac{1}{3}x+2y}+2\cdot zt^2e^{-\frac{1}{3}x+y}-te^{x^3+2x^2-2x}=0 \\ 2z+3t=e^{\frac{10}{3}}+2 \\ 2z-t=e^{\frac{10}{3}}-2 \end{cases}$$

1．确定出$y$，$z$，$t$关于$x$的单值，连续的函数关系式（解析式）：

$y=f(x)=?$

$z=g(x)=?$

$t=h(x)=?$

及其各函数的定义域$\{x\}=?$

提示：求解函数方程以及求解其后问题时，令：$e^{\frac{10}{3}}-1=2a$，可便于计算分析处理

2．求出函数$y=f(x)$的一阶导数：

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=?$$

及其可导区域$\{x\}=?$

3．绘出函数$y=f(x)$的图象草图。

提示：(ⅰ)首先,寻找出函数$f(x)$的三个“零点”：$x_k=?$[其中，$f(x_k)=0;(k=1,2,3)$]，

以及一阶导数函数$f'(x)$的两个“零点”：$x_l'=?$[其中，$f'(x_l')=0;(l=1,2)$]

(ⅱ)然后，考察函数$f(x)$的渐近性质：

(iii) 最后，利用（i）和（ii）的结果，便可绘制出函数 $y=f(x)$ 的图象草图

[注意："零点"方程 $f(x_k)=0$ 最终可化为关于 $x_k$ 的三次方程，可采用（分组分解法）因式分解后再作求解]

二.（本题 20 分）已知二元函数 $z=z(x,y)$：

$$z(x,y)=\frac{1}{4}\left[4(tgx+tgy)^2-12tgx\cdot tgy-3\right],$$

试求：二元函数 $z=z(x,y)$ 在正方形区域：

$$\bar{D}:\ -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4},\quad -\frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{4}$$

里的最大值 $z_{max}=?$ 和最小值 $z_{min}=?$ 并指出二元函数 $z=z(x,y)$ 在闭区域 $\bar{D}$ 里何点处取得最大值 $z_{max}$ 和最小值 $z_{min}$？

三.（本题 20 分）计算二重积分：

$$I=\iint_D\frac{2\sqrt{x^2+y^2}+3y}{\sqrt{x^2+y^2}}ds$$

其中，积分区域 $D$ 为曲线 $y(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$ 与直线 $y=0$ 所围成的区域。

提示：i) 首先考察曲线 $y=y(x)\Rightarrow F(x,y)=0$ 为何种曲线，

ii) 然后采用"平面极坐标"方法作计算？

四.（本题 30 分；其中，每小题 10 分）设曲面：$z=z(x,y)=(y-x^2)^2+\frac{\sqrt{5}}{2}x^2$，柱壁面：$9y-9x^2+5=0$，圆柱体：$x^2+y^2\le 1$，在三维空间 $O-XYZ$ 中的"点的集合"分别为 $G_1$，$G_2$ 和 $G_3$：

（1）说明"点集"：$G=G_1\cap G_2\cap G_3$ 构成了在三维空间 $O-XYZ$ 中的有限长度的曲线 $L$

（2）采用"参数方程"：

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t);\end{cases}\quad [t\in T;\ (T\text{为参变数}t\text{的"取值集合"})]$$

表示出曲线 $L$，

（3）计算曲线 $L$ 的"总长度"：$L=?$

提示：（i）选择参变数 $t=x$，

（ii）考虑柱壁面：$y=x^2-\frac{5}{9}$，与圆柱面：$x^2+y^2=1$ 满足相交或是满足相切？

[不定积分公式：$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$ 可直接引用。]

五.（本题 20 分）四维矢量 $X$ 采用列矩阵表示为：

$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，其中，矢量 $X$ 的四个分量 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 满足如下条件：

$$\begin{cases}4x_1-4x_2+2x_3-2x_4=3,\\3x_1-3x_2+x_3-x_4=2,\\-x_1+x_2+3x_3-3x_4=1,\\2x_1-2x_2-4x_3+4x_4=-1.\end{cases}$$

试证明：这样的四维矢量 $X$ 存在"无穷多个"，并可一般表示为：

$X=a\chi_1+b\chi_2+\frac{1}{2}\chi_3$；其中，$\chi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\chi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\chi_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$；而 $a,b$ 为"任意实数"。

六.（本题 30 分）已知 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 分别是三维空间中的矢量矩阵和单位方向矢量：

$\bar{A}=A_x\bar{e}_x+A_y\bar{e}_y+A_z\bar{e}_z$ ； $\left(A_x=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},A_y=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},A_z=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right)$，

$\bar{B}=\cos\alpha\,\bar{e}_x+\cos\beta\,\bar{e}_y+\cos\gamma\,\bar{e}_z$ ； （$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$）

计算矩阵求和 $c=\sum_{k=1}^{100}k(\bar{A}\cdot\bar{B})^k+\sum_{k=1}^{100}2^k(\bar{A}\cdot\bar{B})^{2k}$

提示：首先考察 $(\bar{A}\cdot\bar{B})^2=?$