120

重庆大学2004年硕士研究生入学考试试题

科目代码：428

科目名称：高等代数

请考生注意：

答题一律（包括填空题和选择题）答在答题纸或答题册上，答在试题上按零分计。

一、填空题（每小题3分，共30分）。

1. 三阶行列式有2个元素为4，其余为 ±1，则此行列式可能的最大值为______。

2. $\gamma_1,\gamma_2,\alpha,\beta$ 皆为三维列向量，$A=(\alpha,\ 3\gamma_1,\ 3\gamma_2)$，$B=(\beta,\ \gamma_1,\ 2\gamma_2)$ 且 $|A|=18, |B|=4$，则 $|A-B|=$________。

3. 三阶方阵A的特征值为 $1,-1,2$，则 A^2+4A^{-1} 的特征值=__________。

4. 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f^{(k)}(x)$ 的s重因子，且 $p(x)\mid f(x)$，那么 $p(x)$______ $f(x)$ 的 $s+k$ 重因子。

5. $A=\begin{pmatrix}0 & a & 9\\ 0 & 6 & 0\\ 4 & 2b & 0\end{pmatrix}$ 相似于对角阵，则 a 与 b 的关系为_______________。

6. 设 R^2 中的内积为 $(\alpha,\beta)=\alpha' A\beta$，$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 在此内积之下的度量矩阵为____________________。

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$，$A^*$ 为A的伴随矩阵，则 $\left|(\frac{1}{4}A)^{-1}-15A^*\right|=$________。

8. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，非齐次线性方程组 $A\bar{x}=\bar{\beta}$ 有唯一解的充分必要条件为

____。

9. 设$f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-2&x\\1&4&4&x^2\\1&8&-8&x^3\end{vmatrix}$，则$f(x)=0$ 的根为________。

10. 向量组$\alpha_1=(1\quad 1\quad k),\alpha_2=(1\quad k\quad 1),\alpha_3=(k\quad 1\quad 1)$是线性无关的，则

k________。

二、 证明题（84 分）

1.（10 分） 证明：如果$d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$，且$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个组合，

那么$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式。

2.（8 分）已知同维数的两个向量组有相同的秩，且其中之一可用另外一个线性表示，证明：这两个向量组等价。

3.（14 分）设A是n阶方阵（$n\geq 2$），A^*为A的伴随矩阵，

(1) 证明：$|A^*|=|A|^{n-1}$；

(2) 证明：

$$R(A^*)=\begin{cases}n, & \text{当}R(A)=n,\\ 1, & \text{当}R(A)=n-1,\\ 0, & \text{当}R(A)<n-1.\end{cases}$$

4.（14 分）设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&\cdots&\cdots&\\a_{n1}&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$是实数域上的矩阵，

证明：(1) 如果 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,i=1,2,\cdots,n$，则 $|A|\neq 0$；

(2) 如果 $a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,i=1,2,\cdots,n$，则 $|A|>0$。.

5. （15 分）设A是 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶实方阵，证明：

(1) 若$B'=B$,则AB的特征值为实数。

(2) 若B正定，则AB的特征值皆大于 0。

(3) 若B正定，且$AB=BA$，则AB正定。

6. （8 分）设 A 为正交阵，且$|A|=-1$，证明：$A+E$不可逆。

7. （10分）设 $A\in C^{n\times n}, W=\{f(A):\ f(x)\in P[x]\}$，$m(x)$ 是A的最小多项式，

证明：W的维数 $=\partial(m(x))$. 其中 $\partial(m(x))$ 表示 $m(x)$ 的最高次数。

8. （5分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是n个实数，证明：$\sum_{i=1}^{n}|a_i|\le\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2)}$.

三、计算题（共36分）

1.（10分） 计算行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&3&4&\cdots&1\\3&4&5&\cdots&2\\&\cdots&\cdots&\cdots&\\n&1&2&\cdots&n-1\end{vmatrix}$$

2. （8分）设 $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&3b&1\end{pmatrix}$， B是三阶非零方阵，且 $AB=O$，求 a,b 以及B的秩。

3. （8分）设 $C=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\end{pmatrix}$，求 C^{101}.

4. （10分）已知全体实的2维向量关于下列运算构成R上的线性空间V：

$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)$,

$k\cdot(a,b)=\left(ka,\quad kb+\dfrac{k(k-1)}{2}a^2\right)$

(1) 求V的一组基。

(2) 定义变换 $A(a,b)=(a,\ a+b)$，证明：A是一个线性变换，并求A在V的一组基下的矩阵表示。