2005 年深圳大学硕士研究生入学考试试题

专业：应用数学　考试科目：数学分析

1．计算（每小题 8 分，共 80 分）

1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)(n+1)}{n^2}$

2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{ctgx}$

3）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2})$ w

4）求 $y=x^{\sin x}$ 的导数，其中 $x>0$

5）令 $x=a(t-\sin t)$ 且 $y=a(1-\cos t)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

6）$\int_0^1\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

7）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin xdx$

8）设 $z=e^{xy}\sin(x+y)$。求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

9）$\int_0^2 dx\int_0^3 xy^2dy$

10）设 L 是半圆周 $x=a\cos t, y=a\sin t, 0\le t\le\pi$。计算第一型曲线积分 $\int_L(x^2+y^2)ds$

2．（10 分） 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 3\\ ax+b & x<3\end{cases}$$

试确定 a,b 的值，使得 $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导。

3．（10 分） 将函数 $f(x)=\int_0^x\sin t^2dt$ 展开成马克劳林级数，并求 $f^{(10)}(0)$ 及 $f^{(11)}(0)$。

4．（10 分） 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 $[x_1,x_n]$ 上必存在 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}$$

5．（10 分） 设 $\{a_n\}$ 为正项数列，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ 收敛

6．（每题 10 分，任选 3 个题）

1）若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限，证明：

（1） $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界

（2） $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续。

2）设函数 $f(x)$ 定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上，且在 $x=0$ 和 $x=1$ 两点连续。证明：若对于任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $f(x^2)=f(x)$，则 $f(x)$ 是常值函数。

3）设 $\{a_n\}$ 为有界数列，记

$\overline{a_n}=\sup\{a_n,a_{n+1}\dots\}$， $\underline{a_n}=\inf\{a_n,a_{n+1},\dots\}$

证明： $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\overline{a_n}=A=\lim\limits_{n\to\infty}\underline{a_n}$

4）设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，求证： $\lim\limits_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

5）若 $[a,b]$ 上的连续函数列 $f_1(x),f_2(x)\dots f_n(x)\dots$ 收敛于 $f(x)$，且 $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$。证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最小值。

6）设 $F(x,y)=\frac{1}{2x}f(y-x)$，其中 $F(1,y)=\frac{y^2}{2}-y+5$。任选 $x_0>0$，作 $x_1=F(x_0,2x_0)$, $x_2=F(x_1,2x_1),\dots,x_{n+1}=F(x_n,2x_n),\dots$。证明：数列 $\{x_n\}$ 有极限并求之。