

2006 年深圳大学硕士研究生入学考试试题

专业：应用数学 考试科目：数学分析

一、计算（每小题 8 分）

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow -1} (\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1})$
2. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$
3. 计算  $\int e^x \sin x dx$
4. 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
5. 设  $u = \frac{x-y}{x+y} \ln \frac{y}{x}$ , 验证  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
6. 选取适当的  $p$ , 是的当  $n \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{1}{n} \sin^2 \frac{1}{n}$  与  $\frac{1}{n^p}$  等价
7. 已知函数的参数表示式是:  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ , 求  $y$  关于  $x$  的一阶和二阶导数
8. 计算:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt}{x^2}$
9. 设  $D$  是由直线  $x=0, y=1, y=x$  所围成的区域, 求重积分  $I = \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$
10. 计算第一型曲线积分  $\int_C (x^2 + y^2) ds$ , 其中,  $C$  是以  $(0,0), (2,0), (0,1)$  为顶点的三角形

二、证明：（每小题 10 分）

1. 求证：当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  没有极限
2. 求证：极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的必要和充分条件是函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的左、右极限存在且相等
3. 设  $f(x)$  在点  $x = x_0$  附近可导, 而且  $\alpha_n < x_0 < \beta_n, (n=1, 2, \dots), a_n \rightarrow x_0, \beta_n \rightarrow x_0, (n \rightarrow \infty)$ , 求证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x_0)$
4. 设数列  $\{x_n\}$  满足下面的条件:  $|x_{n+1}| \leq k|x_n|, n=1, 2, \dots$  其中  $0 < k < 1$ , 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

5. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且对于所有那些在上满足附加条件  $g(a) = g(b) = 0$  的连续函数  $g(x)$ , 有  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , 证明: 在  $[a, b]$  上,  $f(x) \equiv 0$

### 三、证明题 (任选两题, 每题 10 分)

1. 定义函数如下:  $R(0) = 1, R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} (m, n \text{ 互质}) \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ ,  $(0 \leq x \leq 1)$ , 证明:

$R(x)$  在  $[0, 1]$  中的无理数点处连续, 而在  $[0, 1]$  中的有理数点处不连续

2. 若  $f(x)$  在有限区间  $(a, b)$  内一致连续, 则可补充定义  $f(a)$  和  $f(b)$ , 使得  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续

3. 设  $u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上的连续函数  $(n = 1, 2, \dots)$ , 而函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在

区间  $[a, b]$  上处处收敛, 而且一致收敛, 求证: 其和函数  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上连续