2006年深圳大学硕士研究生入学考试试题

(答题必须写在答题纸上，写在本试题纸上无效)

专业：应用数学　　　　考试科目：高等代数

一、必做题（共120分）

1.　（15分）计算 n 阶行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2.　（20分）设3阶矩阵 A 的特征值为 $0, -2, 3$，对应的特征向量分别为

$X_1=(1,0,-2)'$，$X_2=(0,-2,1)'$，$X_3=(-1,2,0)'$。

求

(a) 矩阵 A；

(b) 将向量 $X_0=(2,3,-1)'$ 用 X_1，X_2，X_3 线性表出；

(c) 设 $X_0=(2,3,-1)'$，计算 $A^m X_0$；

3.　（15分）设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求解矩阵方程：$3/4(AA^*X)=3A+2AX$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵.

4.　（20分）设 $f=a(x^2+y^2+z^2)+2xy+2xz-2yz$，问：

（1）a 满足什么条件时，f 是正定的？

（2）a 满足什么条件时，f 是负定的？

5.　（20分）（20分）设 A 是一个 $m\times k$ 矩阵，B 是一个 $k\times n$ 矩阵，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，又已知 A 矩阵的秩 $r(A)=k$，证明：

（1）齐次线性方程组 $ABX=0$ 与 $BX=0$ 是同解方程组；

（2）$r(AB)=r(B)$.

6.　（15分）设复数域上3维线性空间 C^3 上的线性变换 $\underline{A}$ 在 C^3 的一个基下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

求A的最小多项式，并判定A是否可对角化.

7. （15 分）设A是线性空间V的一个线性变换，证明下列两个条件是等价的：
   (1) A把V中某一组线性无关的向量变成一组线性相关的向量；
   (2) A把V中某个非零向量变为零向量.

二、选做题：以下五题中任选三题（共 30 分）

8. （10 分）证明：数域P上线性空间V一向量组的任意线性无关部分组都可以扩充成其一极大无关组.

9. (10 分)设A是n维线性空间V的一个线性变换，并且$V_1, V_2, \ldots, V_s$是A-子空间，满足：$V=V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_s$.
证明：存在V的一个基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$使得$A$在此基下的矩阵为如下形式的分块对角阵(其中$A_i$为$\dim V_i$阶的方阵)：

$$\begin{bmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{bmatrix}$$

10. (10 分) 设σ是 n 维线性空间V的线性变换，且$\sigma^2=\sigma_E$,(σ_E为恒等变换)，证明：
   （1） σ的特征值只能是±1.
   （2） $V=V_1+V_{-1}$. 其中V_1, V_{-1}是V的分别属于特征值 1 和-1的特征子空间.

11. (10 分) 设域F上n维线性空间V的线性变换A有n个不同的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. 而$W$是$A$的一个$r$维的不变子空间. 证明：$A$在$W$上的限制$A|_W$有$r$个不同的特征值，并且为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$中的$r$个.

12. (10 分) 设A为$n\times m$矩阵,B为$m\times n$矩阵,E_m, E_n分别为m和n阶单位矩阵. 证明：

$$\begin{vmatrix}E_m & B\\ A & E_n\end{vmatrix}=|E_m-BA|.$$