专业：基础数学、应用数学

考试科目：高等代数

(本卷共 11 题，其中 1-7 题必做，8-11 题任选 3 题，共要求做 10 题)

1. (15 分) 计算下述 n 阶行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

2. (15 分) 讨论 λ 取什么值时，下述线性方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在有无穷多解的情形，求出其一般解.

$$\begin{cases} \lambda^3 x_1+2x_2-x_3-x_4=-1 \\ \lambda^2 x_1+2x_2-3x_3+x_4=-1 \\ \lambda x_1+2x_2+x_3-3x_4=1 \end{cases}.$$

3. (15 分) 设在 $\mathbb{R}^3$ 中：$\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,1,0)$，$\alpha_3=(1,0,0)$；$\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$．证明 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，并求由基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 到基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ 的过渡矩阵 A，及向量 $\alpha=(-4,3,-2)$ 关于基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的坐标.

4. (15 分) 设 $q(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个 n 元正定二次型，证明存在正实数 λ，使得：对任意实数 x_i，$i=1,2,\cdots,n$，有

$$q(x_1,\cdots,x_n)\ge\lambda(x_1^2+\cdots+x_n^2).$$

5. (20 分) 试求一个正交矩阵 U，使 U^TAU 为对角矩阵（U^T 表示 U 的转置矩阵)，并求出该对角矩阵，其中 A 为下述实对称矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. (20 分) 设 $A=(a_{ij})$为 $n\times(n+1)$矩阵，E 为 n 阶单位矩阵．证明满足 $AX=E$ 的$(n+1)\times n$ 矩阵 X 存在的充分必要条件是：秩 $r(A)=n$．

7. (20 分) 设σ 是数域 F 上 n 维向量空间 V 上的线性变换，σ^2 是恒等变换，但σ 及$-\sigma$ 均不是恒等变换．试证明：

1）σ 的所有特征值构成的集合是 $\{1,-1\}$；

2）σ 可以对角化．

（以下四题中任选三题，共 30 分）

8. (10 分) 设 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2=2A$，且秩$(A)=r<n$，E 为 n 阶单位矩阵．求：

1） A 的全部特征值；

2） 行列式$|E-A|$的值．

9. (10 分) 设 $f_1(x), g_1(x), f_2(x), g_2(x)$是数域 F 上首项系数为 1 的多项式．证明：

$$(f_1(x), g_1(x), f_2(x), g_2(x))=((f_1(x), g_1(x)), (f_2(x), g_2(x))),$$

其中记号$(q(x), p(x))$表示多项式 $q(x)$和 $p(x)$的首项系数为 1 的最大公因式．

10. (10 分) 设 A 为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，且 $A^2=A$．证明：秩(A)+秩$(A-E)=n$．

11. (10 分) 设 $A=(a_{ij})$和 $B=(b_{ij})$是两个 n 阶矩阵．令

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_{nk} \end{bmatrix} \qquad (k=1, 2, \dots, n),$$

证明存在 n 阶矩阵 X 使得 $AX=B$ 的充分必要条件是：$A, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$ 的秩都相等．