专业：基础数学、应用数学

考试科目：数学分析

一、(15 分) (1) 给出函数 f 在区间 I 上一致连续的定义；

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致连续.

二、(15 分)讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在原点(0, 0)处的连续性与可微性.

三、计算下列各题(共 4 题，第 1 题 7 分，第 2 题 8 分，第 3, 4 题各 10 分，共 35 分)：

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

2. 令 $F(x)=\int_a^x t(x-t)\sin t^2 \mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

3. 设 $x_0=a$，$x_1=b$，其中 a, b 为常数，x_n 由递推公式

$$x_n=\frac{x_{n-2}+2x_{n-1}}{3}\,(n\geq 2)$$

给出，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

4. 求第二型曲面积分 $\oiint\limits_S \dfrac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

四、(15 分) (1) 设 $f(x)$ 的 Taylor 展式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，求 $g(x)=\dfrac{f(x)}{1-x}$ 的 Taylor 展式；

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$ 的收敛半径与和函数.

五、(20 分)设 $y=\arcsin x$，

(1) 验证 $\left(1-x^2\right)y'''-3xy''-y'=0$；

(2) 证明 $\left(1-x^2\right)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0(n\geq 1)$；

(3) 求 $y^{(n)}\big|_{x=0}$.

六、证明下列各题(共 4 题，第 1, 2 题各 10 分，第 3, 4 题各 15 分，共 50 分)：

1. 设 $f''(x)<0$，利用 Lagrange 中值定理证明：$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且有界，证明函数 $m(x)=\inf\limits_{a\leq\xi\leq x}\{f(\xi)\}$ 在 $(a,b]$ 上左连续.

3. 若

(1) 积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 函数 $\varphi(x,y)$ 有界，且关于 x 是单调的，

则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 一致收敛.

4. 若函数 $u(x,y)$ 有连续二次偏导数，且满足 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则称 $u=u(x,y)$ 为调和函数. 试证明：u 为调和函数的充分必要条件是 $\oint_C\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}s=0$，其中 C 为任意逐段光滑闭曲线，$\vec{n}$ 为 C 的单位外法向量.