专业： 基础数学、应用数学

考试科目： 数学分析

一、(10 分) 用$\varepsilon-N$语言证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2-5}=1$.

二、计算题(共 80 分)

1. (6 分) 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-e^{x^2}}$.

2. (6 分) 计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^{p-1}\left(\dfrac{1}{(n+1)^p}+\dfrac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^p}\right)$.

3. (6 分) 计算极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^{x^2}e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^{x^2}e^{2t^2}\,dt}$.

4. (8 分) 计算不定积分$\int e^{\sin x}\sin 2x\,dx$.

5. (8 分) 求函数$f(x)=\int_0^x\dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)dt$的幂级数展开式，并求其收敛域.

6. (10 分) 设$f(x)$是连续可导函数，$z=x^3f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，并验证$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$满足

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=3z.$$

7. (12 分) 设V是球面$x^2+y^2+z^2=1$在第一卦限中的切平面与三个坐标面所成的具有最小体积的四面体，求V的体积.

8. (12 分) 已知$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，求积分$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 4x\,dx$.

9. (12 分) 设S为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧，$u(x,y,z)=x^4+y^4+z^4$，计算积分

$$\oiint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \mathrm{d}S,$$

其中 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为球面 S 的单位外法向量，$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

三、证明题(共 60 分)

1. (8 分) 证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x > x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$.

2. (12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

(1) 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点;

(2) 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有两个零点.

3. (12 分) 设广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 f 于 $[a,+\infty)$ 上一致连续，求证：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

4. (14 分) 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\frac{1}{2}}}$ 在 $[a,\pi](a>0)$ 上一致收敛，而在 $[0,\pi]$ 不一致收敛.

5. (14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，

(1) 证明：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续;

(2) 讨论 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最值.