download.kaoyan.com

深圳大学 2011 年硕士研究生入学考试初试试题

（答题必须写在答题纸上，写在本试题纸上无效）

专业：基础数学、应用数学

考试科目代码：712 考试科目名称：数学分析

1. 概念题（共 10 分：每小题 5 分）

(1) 用 $\varepsilon-\delta$ 语言叙述 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b$ 的柯西准则.

(2) 证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 不存在.

2. 计算题（本题共 8 小题，共 60 分）

(1) (5 分) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[5]{1-x}}$.

(2) (5 分) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

(3) (5 分) 求 $\int_{-1}^{1}|x-y|e^x\mathrm{d}x\quad(|y|\le 1)$.

(4) (5 分) 求 $f(x)=\ln(\cos x)$ 在 $x=0$ 处具有皮亚诺型余项的泰勒公式(到 x^4 项).

(5) (10 分) 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

(6) (10 分) 设 f 为可微函数，且 $f'(4)=1$，$u=f(x^3+2y+z^2)$ 和 x,y,z 满足方程

$$4x+y^2+z^3=5xyz \qquad ①$$

试就下述两种情况分别求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处的值:

(a) 由方程①确定了隐函数 $z=z(x,y)$；

(b) 由方程①确定了隐函数 $y=z(x,z)$.

(7) (10 分) 设函数 $Q(x,y)$ 在 xoy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分

$$\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$$

与路径无关，并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}[2xydx+Q(x,y)dy]=\int_{(0,0)}^{(1,t)}[2xydx+Q(x,y)dy]$$

求 $Q(x,y)$.

download.kaoyan.com

(8) (10 分) 计算 $\iint\limits_S (x^2+y^2)ds$

其中 S 为 xoy 平面上方的抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$.

3. 证明题（本题共 7 小题，共 80 分）

(1) (15 分) 利用结论: f 于 $[a,b]$ 可积 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists T$, 使得 $\sum\limits_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. 证明

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots \end{cases}$$

于 $[0,1]$ 可积并求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

(2) (10 分) 讨论 $f(x)=x^\alpha D(x)$ $(\alpha>1)$ 在 R 上的连续性与可导性, 其中, $D(x)$ 为狄利克雷函数.

(3) (10 分) 设 f 于 $[a,+\infty]$ 上一致连续且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(4) (10 分) 试用闭区间套定理证明: 非空有上界的实数集必有上确界.

(5) (12 分) 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ (p 为实数)的敛散性(要求在收敛时指出何时为绝对收敛, 何时为条件收敛).

(6) (13 分) 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\ne 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

(a) 求 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$;

(b) 证明: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续;

(c) 证明: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

(7) (10 分) 设 $F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\cos xy\,dy$, 证明: $2F'(x)+xF(x)=0$.