深圳大学 2013 年硕士研究生入学考试试题

（答题必须写在答题纸上，写在本试题纸上无效）

考试科目代码： 916 考试科目名称： 量子力学

专业：理论物理、粒子物理与原子核物理、等离子体物理、凝聚态物理、薄膜物理与技术

一、 简答题（共 70 分，第一小题 7 分，其余小题 9 分）

1、叙述量子力学中波函数的叠加原理。

2、叙述厄米算符的定义，并证明厄米算符的本征值必为实数。解释为什么量子力学中的力学量必须用厄米算符表示。

3、叙述微观粒子的波粒二象性原理， 谈谈你对该原理的理解.

4、线性谐振子的产生算子 $a^\dagger$ 和湮灭算子 a 满足对易关系 $\left[a,a^\dagger\right]=1$. 首先用归纳法证明 $\left[a,\left(a^\dagger\right)^m\right]=m\left(a^\dagger\right)^{m-1}$，其中 m 正整数。然后验证下面的态

$$|\alpha\rangle=e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,\qquad |n\rangle=\frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

是湮灭算符 a 的本征态，本征值为 α 。

5、已知不显含时间的势函数 $V(\bar{r},t)=V(\bar{r})$，波函数可写成 $\psi(\bar{r},t)=\psi(\bar{r})e^{-iEt/\hbar}$ 。

（1）写出 $\psi(\bar{r})$ 所满足定态 Schrödinger 方程；

（2）粒子在空间中的几率密度 $\rho(\bar{r},t)=\left|\psi(\bar{r},t)\right|^2$ 不随时间变化；

（3）不显含时间的力学量 $\hat{A}$ 的平均值：$\bar{A}=\int\psi^*(\bar{r},t)\hat{A}\psi(\bar{r},t)\mathrm{d}^3\bar{r}$ 也不随时间变化。

6、一维谐振子在 $t=0$ 时处于如下的归一化波函数

$$\psi(x,0)=\sqrt{\frac{1}{5}}\psi_0(x)+\sqrt{\frac{1}{2}}\psi_2(x)+C\psi_3(x)$$

其中 $\psi_n(x)$ 是对应能量本征值 E_n 的归一化的本征函数. 求常数 C 。

7、考虑一个一维束缚粒子，$\phi(x,t)$ 为其波函数. 请回答：（1） $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\phi(x,t)=?$；（2）利用含时薛定谔方程证明：$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*(x,t)\phi(x,t)\,dx=0$ 。

8、已知厄米的泡里(Pauli)算符满足如下的对易关系和条件

$$\left[\sigma_x,\sigma_y\right]=2\mathrm{i}\sigma_z,\quad \left[\sigma_y,\sigma_z\right]=2\mathrm{i}\sigma_x,\quad \left[\sigma_z,\sigma_x\right]=2\mathrm{i}\sigma_y,\quad \sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=1。$$

试证明在 σ_z 表象中，即 σ_z 对角化的表象，泡里(Pauli)算符可有如下的矩阵表示

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}。$$

二、（20 分）

(1) (8 分) 设算符 $\hat{A}$ 的逆算符 $\hat{A}^{-1}$ 存在，试将算符 $\left(\hat{A}-\lambda\hat{B}\right)^{-1}$ 展开成参量 λ 的幂函数；

(2) (12 分) 求证：$\left[\hat{p},\hat{A}\right]=-i\hbar\frac{d\hat{A}}{dx}$，式中 $\hat{p}=\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$，而 $\hat{A}=\hat{A}(x)$ 是 x 的函数。

三、（30 分）设：能量为 $E>0$ 的粒子流从 $x=-\infty$ 沿 x 轴正方向入射到一维势阱

$$U(x)=\begin{cases}0 & x\geq a, x\leq 0\\ -U_0 & 0<x<a\end{cases}$$

中（$U_0>0$）。

(1) (20 分) 求反射系数 R 和透射系数 T；

(2) (5 分) 证明：$T+R=1$，说明物理意义；

(3) (5 分) 问：什么是共振透射？当入射粒子流能量满足什么条件时，发生共振透射？

四、(30 分)一维谐振子的哈密顿量为 $H_0=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$，受到微扰 $H'=cx^2$（$c\ll m\omega^2$）作用。

(1) (20 分) 用微扰论求解能级移动到二级近似；

(2) (10 分) 写出能级的精确解，并与微扰论的结果比较。

提示：谐振子波函数满足：

$$x\varphi_n(x)=\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\varphi_{n-1}(x)+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\varphi_{n+1}(x)\right]，其中：\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}。$$