深圳大学2013年硕士研究生入学考试初试试题

（答题必须写在答题纸上，写在本试题纸上无效）

考试科目代码：715 考试科目名称：数学分析

专业：数学、统计学

一、叙述题（每小题10分，共20分）

1. 用$\varepsilon-\delta$语言叙述f于区间I上一致连续和非一致连续的定义.

2. 用$\varepsilon-N$语言叙述$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$于区间$I$上的一致收敛性和非一致收敛性.

二、判断题（正确的打“T”，错误的打“F”， 每小题3分，共30分）

1. 由有理数组成数列的极限可能不是有理数. （ ）

2. 第一类间断点就是跳跃间断点. （ ）

3. 在拐点的两侧，函数的单调性是不一样的. （ ）

4. 在区间上具有跳跃间断点的函数一定不存在原函数. （ ）

5. 在区间上具有无限个间断点的函数仍可能可积. （ ）

6. 若幂级数的收敛半径$R>0$且在$x=R$时收敛，则该级数在$[a,R]$上一致收敛($|a|<R$). （ ）

7. 由有限个实数组成的集合的聚点集一定是空集. （ ）

8. 对二元函数来说，只要两个偏导数在某点存在，函数在该点一定可微. （ ）

9. $F(y)=\int_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. ( )

10. $\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-xy^2}\mathrm{d}y$ 于 $(0,+\infty)$ 上一致收敛. ( )

三、填空题（每小题 5 分，共 50 分）

1. $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)=$____________________.

2. 已知 $\frac{1}{x}f'(x)=\arctan x$，则 $f(x)=$____________________.

3. $\forall x>0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}x^{n+1}=$____________________.

4. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为____________________.

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=$____________________.

6. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 的麦克劳林展式为____________________.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{k}{n}}=$____________________.

8. 设 V 是由 $x^2+y^2=z^2$ 与上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成，则

$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$____________________.

9. 闭曲线 $x=a\cos t, y=b\sin t, 0\le t\le 2\pi$ 所围区域的面积是__________.

10. 设 S 是由柱体 $y^2+z^2\le 1$ 被平面 $x=y$ 所截的部分，则

$\iint\limits_S x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________________.

四、证明题（共 **50** 分：第 **1**、**2** 每题 **10** 分；第 **3**、**4** 每题 **15** 分）

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 于$[a,b]$上一致收敛且每一项 $u_n(x)$ 于$[a,b]$可积，则

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

2. 设 f 于$[-\pi,\pi]$上可积，a_n,b_n 为 f 的傅里叶系数，证明下式成立

$\frac{a_0^{\ 2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2})\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$，并给出一个使该式等号成立的充分条件.

3. 设 f 于$[a,+\infty)$上连续（$a>0$），函数$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 于$[a,+\infty)$上有界，试证明：当$\lambda>0$时，$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x^\lambda}\mathrm{d}x$ 收敛. 并由此证明$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

4. 试证明：$\int_0^{+\infty}e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\arctan y,\ y\in[0,+\infty)$.并以此求

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x\ (\beta\ne0)$.