华南师范大学 2005 年硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析与高等代数

适用:课程与教学论 基础数学 计算数学 应用数学 运筹学与控制论

数学分析部分(75 分)

一 计算题(每小题 8 分)

1 ,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^3 x}$

2 求 $\int \sec^3 x dx$

3 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

4 求 $\int_L \dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$ 其中 L: $x^2+(y-1)^2=R^2$,0<R$\neq$1,取逆时针方向

二 证明题(每小题 9 分)

1 证明 :对 $\forall a,b\in R, e^{\frac{a+b}{2}}\le\frac{1}{2}(e^a+e^b)$;

2 设 $\lim\limits_{x\to\infty}a_n=0$,证明:$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)=0$

3 设 f(x)在(0,1)上连续, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}=-\infty$,证明 $f(x)$在$(0,1)$内取到最大值

三 讨论题(每题 8 分)

1,讨论级数 $1-\dfrac{1}{2^{\frac13}}+\dfrac{1}{3^{\frac12}}-\dfrac{1}{4^{\frac13}}+\dfrac{1}{5^{\frac12}}-\dfrac{1}{6^{\frac13}}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^{\frac12}}-\dfrac{1}{(2n)^{\frac13}}+\ldots$ 的敛散性

2 设 $\alpha>0,\beta>0$, 讨论 $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin x^\beta}{x^\alpha}dx$ 的敛散性(包含条件收敛和绝对收敛)

高等代数部分(75 分)

一(15 分) 令 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是数域 F 上的多项式,a,b,c,d$\in$F 且 ad-bc $\neq$ 0,证明

$(af(x)+bg(x), cf(x)+dg(x)) = (f(x), g(x))$

二 (15 分)设非零实 1×n 矩阵 A=$(a_1, a_{2,} \dots a_n)$

1　求 $A'A$ 及秩($A'A$)

2 求 $A'A$ 的特征值;

3 求 $A'A$ 的特征值对应的特征向量

三 (15 分) 设 F 是数域, $F_n[x] = \{f(x) \in F[x] \mid \partial f(x) < n\}$

定义向量空间 $F_n[x]$ 上 的线性变换 σ 如下

$\sigma(f(x)) = xf'(x) - f(x) (\forall f(x) \in F_n[x])$

1 求子空间 Ker σ =$\{f(x) \in F_n[x] \mid \sigma(f(x)) = \}, \sigma(F_n[x]) = \{\sigma(f(x)) \in F_n[x]\}$

2　证明 $F_n[x]$=ker $\sigma \oplus \sigma$ ($F_n[x]$)

四　(15 分) 设 A 是正定矩阵,证明

1　, A^{-1} ,kA, A^m　(m 是正整数), A^* 都是正定矩阵

2　$g(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_j \ge 0 (i = 0,1,2 \dots m)$ 有一个为正,则 g(A)正定

五 (15 分)　设 V 是 n 维欧氏空间, $\{\alpha_{1,} \alpha_{2,} \dots \alpha_n\}$ 是 V 的标准正交基, $\{\beta_1, \beta_{2,\dots,} \beta_n\}$ 是 V 中一组向量且 $(\beta_1, \beta_{2,\dots,} \beta_n) = (\alpha_{1,} \alpha_{2,} \dots \alpha_n)$A,　A 为 n 阶实方阵.证明 $\{\beta_1, \beta_{2,\dots,} \beta_n\}$ 是 V 的标准正交基当且仅当 A 是正交矩阵