华南理工大学
2004年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（试卷上做答无效，请在答题纸上做答，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：概率统计

适用专业：计算数学、应用数学、运筹学与控制论

一、单项选择题(在下列各题中都设有代码为A、B、C、D的四个备选答案，请把最合适的答案代码写在答题纸上。本大题分5小题，每小题4分，共20分).

1、A,B 为任意两个事件，$\emptyset$ 为不可能事件，以下论断正确的是(　　).

(A) 若 $AB \neq \emptyset$ 独立，则 A,B 一定独立;

(B) 若 $AB \neq \emptyset$, 则 A,B 有可能独立;

(C) 若 $AB = \emptyset$, 则 A,B 一定独立;

(D) 若 $AB = \emptyset$, 则 A,B 一定不独立.

2、将一枚硬币独立地重复掷两次，记 $A_1=$\{第一次出现正面\}, $A_2=$\{第二次出现正面\}, $A_3=$\{正、反面各出现一次\}, $A_4=$\{正面出现两次\}, 则(　　).

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立;　　(B) A_2,A_3,A_4 相互独立;

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立;　　(D) A_2,A_3,A_4 两两独立.

3、设随机变量 ξ 和 η 都服从正态分布，且它们不相关，则(　　).

(A) ξ,η 一定独立;　　(B) (ξ,η) 服从二维正态分布;

(C) ξ,η 未必独立;　　(D) $\xi+\eta$ 服从一维正态分布.

4、设随机变量 $\xi \sim t(n)(n>1), \eta = \frac{1}{\xi^2}$, 则(　　).

(A) $\eta \sim \chi^2(n)$;　　(B) $\eta \sim \chi^2(n-1)$);

(C) $\eta \sim F(n,1)$;　　(D) $\eta \sim F(1,n)$.

5、设随机事件 A,B 满足 $B \subset A$, 下列结论不一定成立的是(　　).

(A) $P(A \cup B) = P(A)$;　　(B) $P(B) \leq P(A)$;

(C) $P(AB) = P(B)$;　　(D) $P(B|A) = P(B)$.

二、填空题(在下列各题中，把最恰当的解答填在答题纸上，本大题分5小题，每小题4分，共20分).

1、设随机变量 X 和 Y 的相关系数为0.9, 若 $Z = X - 0.4$, 则 Y 与 Z 的相关系数为__________.

2、设随机变量X和Y的相关系数为0.5,$EX=EY=0, EX^2=EY^2=2$,则$E(X+Y)^2=$__________.

3、设随机变量(X,Y)的分布密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

则$P\{X+Y\le 1\}=$__________.

4、设有12人排队抽签抽取足球赛入场券(抽完不再放回，12张券中只有1张足球赛入场券),第三人抽得足球赛入场券的概率是__________.

5、已知一批零件的长度X(单位：cm)服从正态分布$N(\mu,1)$,现从中随机地抽取16个零件，得到长度的平均值为40(cm),则μ的置信度为0.95的置信区间为__________(注：对标准正态分布的分布函数$\Phi(x)$,有$\Phi(1.96)=0.975, \Phi(1.645)=0.95$).

三、计算题(以下每题10分，共50分).

1、设随机变量ξ,η独立，其中ξ具概率分布$\xi\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$.而$\eta$的分布密度函数为$f(y)$,试求$\varsigma=\xi+\eta$的分布密度函数.

2、设随机变量ξ,η独立，其中ξ具概率分布$\xi\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.又设$M=max\{\xi,\eta\}, N=min\{\xi,\eta\}$,试求

(1) 二维随机变量(M,N)的分布率(联合分布列);

(2) M与N协方差$Cov(M,N)$.

3、设随机向量(ξ,η)具有分布密度函数$f(,y)=\begin{cases}xe^{-x(y+1)}, & x>0, y>0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(1) 求边缘分布密度函数$f_\xi(x), f_\eta(y)$;

(2) 求在给定$\eta=y(y>0)$的条件下，ξ的条件分布密度函数$f_{\xi|\eta}(x|y)$.

4、设$\xi_1,\xi_2,\cdots$为独立随机变量序列，且

$$P(\xi=0)=1, P(\xi_n=\pm\sqrt{n})=\frac{1}{n}, P(\xi_n=0)=1-\frac{2}{n}, n=2,3,\cdots.$$

试证明$\{\xi_n\}$服从大数定律.

5、设总体ξ的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为来自ξ的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应的样本观测值．试求

(1) θ的最大似然估计量$\hat{\theta}_L$;　　(2) θ的矩估计量$\hat{\theta}_M$.

四、**综合题(以下每题15分，共60分)**.

1、设想这样一种博彩游戏，博彩者将本金1元压注在1到6的某个数字上，然后掷三颗骰子，若所压的数字在三次掷骰子中出现i次$(i=1,2,3)$，则下注者赢i元，否则没收1元本金，试问博彩者的平均所得是多少？这样的游戏规则对下注者是否公平？

2、已知ξ_1,ξ_2相互独立，都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，又$\eta_1=a\xi_1+b\xi_2$，$\eta_2=a\xi_1-b\xi_2$，其中a,b是常数.

(1) 求η_1,η_2的相关系数;

(2) 问η_1,η_2是否相关，是否独立;

(3) 当η_1,η_2的相互独立时，求(η_1,η_2)的联合分布密度函数.

3、一囚徒被羁押在一座有三扇门的地牢内，其中一扇门通向一个短地道，通过这一短地道走一天后又返回地牢；另一扇门同向另一长地道，通过该地道走三天后仍返回地牢；第三扇门同向自由．假定地牢很暗，该囚徒想逃走是等可能地选择每扇门，试求该囚徒在押的平均天数.

4、一药厂生产一种新的止痛片，厂方希望验证服用新药片后开始起作用的时间间隔较原有止痛片至少缩短一半，因此厂方提出需检验假设

$$H_0:\mu_1\le 2\mu_2,\qquad H_1:\mu_1>2\mu_2.$$

此处μ_1,μ_2分别是服用原有止痛片和服用新止痛片后至起作用的时间间隔的总体的均值．设两总体均为正态分布且方差分别为已知值σ_1^2和σ_2^2．现分别在两总体中取一样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$，设两个样本独立，试给出上述假设H_0的拒绝域(取显著性水平为α).