

一、求下列常微分方程的通解。 (20 分)

1.  $y'' - 3y' + 2y = xe^x$

2.  $(2x \sin y + 3x^2 y) dx + (x^3 + x^2 \cos y + y^2) dy = 0$

二、讨论一阶常微分方程:  $\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}}$  在怎样的区域内满足解的存在唯一性条件, 并求出通过点  $(0,0)$  的一切解。 (15 分)

三、求方程组:  $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -4x - y \\ \dot{z} = 4x - 8y - 2z \end{cases}$  的通解。 (20 分)

四、考虑微分方程:  $y'' + q(x)y = 0$  (20 分)

1. 设  $y_1 = \varphi(x)$  与  $y_2 = \psi(x)$  是它的任意两个解, 试证  $\varphi(x)$  与  $\psi(x)$  的朗斯基行列式恒等于一个常数。

2. 设已知方程有一个特解为  $y = e^x$ , 试求这个方程的通解, 并确定函数  $q(x)$ 。

五、试用复化梯形公式计算积分:  $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ,  $n=8$  (20 分)

六、已知一组实验数据如下, 用一般最小二乘法求它的拟合曲线。 (20 分)

$x_i$	1	2	3	4	5
$f_i$	4	4.5	6	8	8.5
$\omega_i$	2	1	3	1	1

七、设函数  $\varphi(x)$  满足下列条件： (20 分)

1. 对任意  $x \in [a, b]$  有

$$a \leq \varphi(x) \leq b$$

2. 存在正数  $L < 1$ ，使对任意  $x \in [a, b]$  有

$$|\varphi'(x)| \leq L < 1$$

则迭代过程  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  对于任意初值  $x_0 \in [a, b]$  均收敛于方程  $x = \varphi(x)$  的根  $x^*$ ，且有如下的误差估计式：

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|$$

八、试对下列算式设计尽可能简单的算法： (15 分)

1.  $p(x) = x^{255}$

2.  $p(x) = x^7 - 2x^6 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x - 1$